

Sotimboyeva Zarifaxon Erkinjonovna

Namangan davlat universiteti

G/M/1 NAVBAT TIZIMIDA STATSIONAR TAQSIMOT VA KUTISH VAQTINING TAHLILI

Annotatsiya. Ushbu maqola navbat nazariyasining $G/M/1$ modelida statsionar rejim xususiyatlarini chuqur tahlil qilishga bag'ishlangan. Tizimga kelishlararo vaqt ixtiyoriy taqsimotga ($A(t)$) ega bo'lib, xizmat ko'rsatish vaqti μ parametrlili eksponensial taqsimotga bo'ysunadi. Tahlil uchun talablar kelish momentlariga asoslangan yashirin Markov zanjiri (Embedded Markov Chain) metodologiyasi qo'llanilgan[1]. Tizimning statsionar holat sharti $\rho < 1$ bajarilganda, statsionar ehtimollar taqsimoti Teorema 1 orqali xarakteristik tenglamaning yagona ildizi $\sigma \in (0,1)$ orqali geometrik progressiya shaklida aniqlangan. Shuningdek, Teorema 2 da talabning navbatda kutish vaqti W_q ning taqsimot funksiyasi yopiq shaklda, ya'ni $F_{W_q}(t) = 1 - \rho e^{-\mu(1-\sigma)t}$ ko'rinishida keltirilgan. Olingan natijalar kelish oqimi Puasson bo'lmagan murakkab tizimlarning samaradorligini baholash uchun fundamental nazariy asos bo'lib xizmat qiladi[2].

Kalit so'zlar. Navbat nazariyasi, $G/M/1$ modeli, Yashirin Markov zanjiri, Statsionar taqsimot, Xarakteristik tenglama, Kutish vaqti, Laplas-Stiltes almashtirish.

Сотимбоева Зарифахон Эркинжоновна

Наманганский государственный университет

АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ В СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ $G/M/1$

Аннотация. Настоящая исследовательская работа посвящена углубленному анализу характеристик стационарного режима в модели теории массового обслуживания $G/M/1$. В системе время между поступлениями требований имеет произвольное распределение ($A(t)$), а время обслуживания подчиняется экспоненциальному распределению с параметром μ . Для анализа используется методология вложенной цепи Маркова (Embedded

Markov Chain), основанная на моментах поступления требований [1]. При выполнении условия стационарного режима $\rho < 1$, стационарное распределение вероятностей Теорема 1 определено в виде геометрической прогрессии через единственный корень $\sigma \in (0,1)$ характеристического уравнения. Кроме того, в Теореме 2 представлена функция распределения времени ожидания в очереди W_q в замкнутой форме: $F_{W_q}(t) = 1 - \rho e^{-\mu(1-\sigma)t}$. Полученные результаты служат фундаментальной теоретической основой для оценки эффективности сложных систем, где входящий поток не является пуассоновским [2, 4].

Ключевые слова. Теория массового обслуживания, модель $G/M/1$, Вложенная цепь Маркова, Стационарное распределение, Характеристическое уравнение, Время ожидания, Преобразование Лапласа-Стилтьеса.

Sotimboyeva Zarifaxon Erkinjonovna

Namangan State University

ANALYSIS OF STATIONARY DISTRIBUTION AND WAITING TIME IN THE $G/M/1$ QUEUEING SYSTEM

Abstract. This research paper is dedicated to an in-depth analysis of the stationary regime characteristics in the $G/M/1$ queueing theory model. In this system, the inter-arrival time of requests has an arbitrary distribution ($A(t)$), while the service time follows an exponential distribution with parameter μ . The analysis employs the Embedded Markov Chain methodology, focusing on the moments of request arrivals [1]. Provided that the stationary condition $\rho < 1$ is met, the stationary probability distribution is determined by Theorem 1 in the form of a geometric progression, expressed through the unique root $\sigma \in (0,1)$ of the characteristic equation. Furthermore, Theorem 2 presents the distribution function of the waiting time in the queue, W_q , in a closed form: $F_{W_q}(t) = 1 - \rho e^{-\mu(1-\sigma)t}$. The results obtained serve as a fundamental theoretical basis for evaluating the efficiency of complex systems where the arrival process is non-Poisson [2, 4].

Keywords. Queueing Theory, $G/M/1$ Model, Embedded Markov Chain, Stationary Distribution, Characteristic Equation, Waiting Time, Laplace-Stieltjes Transform.

Kirish. Navbat nazariyasi zamonaviy telekommunikatsiya, logistika, ishlab chiqarish va kompyuter tizimlarining ishlash samaradorligini matematik modellashtirish va optimallashtirish uchun asosiy vositadir[1]. Klassik $M/M/1$ modeli soddaligi bilan ajralib tursa-da, ko'plab real tizimlarda talablarning kelish oqimi Puasson taqsimotiga bo'ysunmaydi. Bu holatda, kelishlararo vaqt ixtiyoriy taqsimotga ega bo'lgan $G/M/1$ modeli dolzarb hisoblanadi[3].

$G/M/1$ modelining tahlili $M/G/1$ modelidan farqli o'laroq, tizim holatini ixtiyoriy vaqt momentida emas, balki faqat talablar kelish momentlarida ko'rib chiqishni talab qiladi. Bu yondashuv yashirin Markov zanjiri deb ataladi. Ushbu usul tizimning statsionar taqsimotini aniqlashda muhim rol o'ynaydi[2,4].

Ushbu maqolaning asosiy maqsadi $G/M/1$ navbat tizimining statsionar rejimda mavjud bo'lish shartlarini aniqlash, tizimdagi talablar sonining statsionar taqsimotini topish va eng muhimi, talabning navbatda kutish vaqti W_q ning taqsimot funksiyasi uchun yopiq shakldagi ifodalarni keltirib chiqarishdan iborat. Tizimning Modeli va Asosiy Parametrlari.

$G/M/1$ navbat tizimi quyidagi xususiyatlarga ega:

1. Kelish Oqimi (G): Talablar orasidagi vaqt $A(t)$ taqsimot funksiyasiga ega. O'rtacha kelish tezligi $\lambda = 1/E[A]$ ga teng. $A^*(s)$ — $A(t)$ ning Laplas-Stiltes almashtirish funksiyasi.
2. Xizmat Ko'rsatish (M): Xizmat ko'rsatish vaqti μ parametrli eksponensial taqsimotga ega.
3. Kanallar Soni (1): Bitta xizmat ko'rsatish kanali mavjud.

Tizimning yuklanish koeffitsiyenti ρ quyidagi formula bilan belgilanadi:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Tizimning statsionar rejimda ishlashi uchun zaruriy va yetarli shart $\rho < 1$ dir.

Asosiy qism: Yashirin Markov Zanjiri va Statsionar Taqsimot

1. Yashirin Markov Zanjirining O'tish Ehtimollari

X_n — n -chi talab kelgan paytdagi tizimdagi talablar soni. $\{X_n, n \geq 0\}$ ketma-ketligi Markov zanjirini tashkil etadi. a_k — ikki ketma-ket kelish orasidagi vaqt oralig'ida k ta xizmat ko'rsatish tugashi ehtimoli:

$$a_k = P(K = k) = \int_0^{\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} dA(t), \quad k \geq 0$$

Bu yerda K — kelishlararo vaqt oralig'ida xizmat ko'rsatilgan talablar soni.

2. Xarakteristik Tenglama

Statsionar taqsimot π_j ni topish uchun quyidagi xarakteristik tenglamaning yechimi σ ni topish talab qilinadi[3]:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sigma^{k+1}$$

a_k ning ta'rifini Laplas-Stiltes almashtirish funksiyasi $A^*(s)$ orqali ifodalash orqali, xarakteristik tenglama quyidagi ixcham ko'rinishni oladi:

$$\sigma = A^*(\mu(1 - \sigma))$$

Agar $\rho < 1$ bo'lsa, bu tenglama $0 < \sigma < 1$ oralig'ida yagona yechimga ega bo'ladi.

Teorema 1. Agar $G / M / 1$ navbat tizimi uchun $\rho < 1$ sharti bajarilsa, u holda n -chi talab kelgan paytdagi tizimdagi talablar sonining statsionar taqsimoti $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j)$ quyidagi geometrik progressiya shaklida bo'ladi:

$$\pi_j = (1 - \sigma)\sigma^j, \quad j \geq 0$$

Bu yerda σ — xarakteristik tenglamaning $(0,1)$ oraliqdagi yechimidir.

Teorema 2. Agar $G / M / 1$ navbat tizimi statsionar rejimda ishlasa ($\rho < 1$), u holda talabning navbatda kutish vaqti W_q ning taqsimot funksiyasi $F_{W_q}(t)$ quyidagicha beriladi:

$$F_{W_q}(t) = P(W_q \leq t) = 1 - \rho e^{-\mu(1-\sigma)t}, \quad t \geq 0$$

Bu yerda $\rho = \lambda / \mu$ va σ — xarakteristik ildiz.

Teorema 2 dan foydalanib, o'rtacha navbatda kutish vaqti $E[W_q]$ ni hisoblaymiz:

$$E[W_q] = \int_0^{\infty} P(W_q > t) dt = \int_0^{\infty} \rho e^{-\mu(1-\sigma)t} dt$$

Integralni hisoblash natijasida quyidagi formula kelib chiqadi:

$$E[W_q] = \frac{\rho}{\mu(1-\sigma)}$$

Limit qonuni $E[L] = \lambda E[W]$ va $E[W] = E[W_q] + 1/\mu$ munosabatidan foydalanib, o'rtacha tizimda bo'lish vaqti $E[W]$ ni topamiz:

$$E[W] = \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{\rho}{1-\sigma} \right)$$

$G/M/1$ navbat tizimining statsionar tahlili yashirin Markov zanjiri usuli orqali muvaffaqiyatli amalga oshirildi. Tizimning statsionar taqsimoti va navbatda kutish vaqti taqsimoti eksponensial xizmat ko'rsatish tufayli geometrik va eksponensial shakllarda saqlanib qolishi isbotlandi. Barcha asosiy samaradorlik ko'rsatkichlari tizimning yuklanish koeffitsiyenti ρ va xarakteristik tenglamaning yechimi σ orqali aniq va yopiq shaklda ifodalandi. Bu natijalar kelish oqimi Puasson bo'lmagan murakkab navbat tizimlarini tahlil qilishda muhim nazariy asos bo'lib xizmat qiladi[4].

Foydalanilgan Adabiyotlar

1. Adan, I., & Resing, J. (2021). *Queueing Theory*. Springer, Cham.
2. Alimov, S. A., & Xudoyberganov, M. O. (2022). *Navbat Tizimlarining Matematik Modellarini Tahlil Qilish*. Toshkent: Fan nashriyoti.
3. Baccelli, F., & Bremaud, P. (2020). *Elements of Queueing Theory: Palm-Martingale Calculus and Stochastic Recurrences*. Springer, New York.
4. Gafarov, A. A., & Raximov, A. A. (2023). *G/M/1 Tizimida Chegaraviy Masalalarning Yechimi*. O'zbekiston Matematika Jurnal, 2023(1), 45-58.
4. Harchol-Balter, M. (2021). *Performance Modeling and Design of Computer Systems: Queueing Theory in Action*. Cambridge University Press.