

Мадрахимов А.Э.

– доцент, кандидат физика-математических наук ФерГУ.

РАЗЛОЖЕНИЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

Аннотация. В работе [1] изучена задача о применении симметрических многочленов к решению системы уравнений. В [2] изучен вопрос об уничтожении иррациональности в знаменателе дроби. В настоящей статье рассматриваются разложения на множители симметрического многочлена.

Ключевые слова: многочлены от нескольких переменных, симметричные многочлены, основные симметричные многочлены, разложение симметричных многочленов на множителей.

Madrahimov A.E.

– dotsent, fizika-matematika fanlari nomzodi, FarDU.

SIMMETRIK KO‘PHADLARNI KO‘PAYTUVCHILARGA AJRATISH

Annotatsiya. [1] simmetrik ko‘phadliklarni tenglamalar sistemasini yechish masalasi o‘rganilgan. [2] da simmetrik ko‘pxadlikni kasrning maxrajini irratsionallikdan qo‘shqarish masalasi ko‘rib chiqilgan. Ushbu maqolada simmetrik ko‘phadlarini ko‘paytuvchilarga yoyish masalasi bayon qilingan.

Kalit so‘zlar: ko‘p o‘zgaruvchili ko‘phadlik, simmetrik ko‘phadlik, asosiy simmetrik ko‘phadlar, simmetrik ko‘phadlarni ko‘paytuvchilarga ajratish.

Madrakhimov A.E.

– Associate Professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, FerSU.

FACTORIZATION OF SYMMETRIC POLYNOMIALS

Abstract. The paper [1] studied the problem of applying symmetric polynomials to solving a system of equations. In [2] the issue of eliminating irrationality in the denominator of a fraction was studied. This paper considers the factorization of a symmetric polynomial.

Key words: polynomials in several variables, symmetric polynomials, basic symmetric polynomials, factorization of symmetric polynomials.

В данной статье изучается применения теоремы о симметрических многочленах, т.е. приведены примеры и решения этих примеров касающиеся к основной теореме о симметрических многочленах [3].

Рассмотрим однородный симметрический многочлен и выразим через элементарные симметрические многочлены

$$\sigma_1 = x + y \quad \text{и} \quad \sigma_2 = x \cdot y.$$

а затем разложим на множители.

Задан симметрический многочлен четвёртой степени и его представим через σ_1, σ_2 . В результате имеем относительно σ_2 многочлен второй степени. Затем её разложим на множители

Пример 1. Разложить $f(x, y) = 10x^4 - 27x^3y - 110x^2y^2 - 27xy^3 + 10y^4$ однородный симметрический многочлен четвёртой степени на множители.

Решение.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 10(x^4 + y^4) - 27xy(x^2 + y^2) - 11x^2y^2 = \\ &= 10s_4 - 27\sigma_2s_2 - 11\sigma_2^2 \end{aligned} \quad (2)$$

где,

$$S_4 = x^4 + y^4, \quad S_2 = x^2 + y^2, \quad \sigma_2 = xy$$

Имея в виду

$$\begin{aligned} S_2 &= x^2 + y^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \\ S_4 &= x^4 + y^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 \end{aligned}$$

получим

$$f(x, y) = 10\sigma_1^4 - 67\sigma_1^2\sigma_2 - 36\sigma_2^2 \quad (3)$$

Последнее есть многочлен относительно σ_2 второй степени.

Решив последнее уравнение (3) относительно σ_2 , убедимся в том, что оно имеет две корни

$$\sigma_2 = 2\sigma_1^2 \quad \text{и} \quad \sigma_2 = \frac{5}{36}\sigma_1^2.$$

Имея в виду последнее (3) получим

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -36(\sigma_2 + 2\sigma_1^2) \left(\sigma_2 - \frac{5}{36}\sigma_1^2 \right) = \\ &= (\sigma_2 + 2\sigma_1^2)(5\sigma_1^2 - 36\sigma_2) \end{aligned} \quad (4)$$

Учитывая, что $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$ из (4) получим

$$\begin{aligned} f(x, y) &= [2(x + y)^2 + xy][5(x + y)^2 - 36xy] = \\ &= (2x^2 + 5xy + 2y^2)(5x^2 - 26xy + 5y^2) \end{aligned} \quad (5)$$

Каждый множитель в (5) есть квадратный трёхчлен.

Решая $2x^2 + 5xy + 2y^2$ относительно x , находим $x = -\frac{1}{2}y$, $x = -2y$.

Поэтому

$$2x^2 + 5xy + y^2 = 2 \left(x + \frac{1}{2}y \right) (x + 2y) = (2x + y)(x + 2y) \quad (6)$$

Аналогично повторяя последнее рассуждение имеем

$$5x^2 - 26xy + 5y^2 = (x - 5y)(5x - y) \quad (7)$$

В силу (6) и (7) из (5) получим

$$f(x, y) = (2x + y)(x + 2y)(5x - y)(x - 5y)$$

Пример 2. Разложить на множители

$$f(x, y) = 6x^4 - 11x^3y - 16x^2y^2 - 11xy^3 + 6y^4$$

Решение. Сначала данный многочлен $f(x, y)$ выразим через σ_1 , σ_2 , где $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$. Легко убедиться в том, что

$$f(x, y) = 6\sigma_1 - 35\sigma_1^2\sigma_2 + 16\sigma_2^2 \quad (8)$$

Последний многочлен относительно σ_2 квадратный трёхчлен. Решая уравнение (8) относительно σ_2 находим два решения:

$$\sigma_2' = 2\sigma_1^2, \quad \sigma_2' = \frac{3}{16}\sigma_1^2$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 16(\sigma_2 - 2\sigma_1^2) \left(\sigma_2 - \frac{3}{16}\sigma_1^2 \right) = \\ &= (2\sigma_1^2 - \sigma_2)(3\sigma_1^2 - 16\sigma_2) \end{aligned} \quad (9)$$

напомним, что $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$. Имея в виду последнее $f(x, y)$ можно написать в следующем виде

$$\begin{aligned} f(x, y) &= [2(x + y)^2 - xy][3(x + y)^2 - 16xy] = \\ &= (2x^2 + 3xy + y^2)(3x^2 - 10xy - 3y^2) \end{aligned} \quad (10)$$

Но многочлен $2x^2 + 3xy + y^2$ имеет комплексный корень, поэтому его оставляем без изменений. Ясно, что

$$3x^2 - 10xy + y^2 = (x - 3y)(3x - y) \quad (11)$$

В силу (11), (10) и (9) имеем

$$f(x, y) = (2x^2 + 3xy + y^2)(x - 3y)(3x - y)$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Разложить на множители данный симметрический многочлен [3]

$$f(x, y) = 2x^4 - x^3y + 3x^2y^2 - xy^3 + 2y^4$$

Решение. Выразим заданный многочлен $f(x, y)$ через σ_1 , σ_2 элементарных симметрических многочленов

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2x^4 - x^3y + 3x^2y^2 - xy^3 + 2y^4 = \\ &= 2(x^4 + y^4) - xy(x^2 + y^2) + 3x^2y^2 = \\ &= 2[\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2] - \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + 3\sigma_2^2 = \\ &= 2\sigma_1^4 - 8\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 3\sigma_2^2 = \end{aligned}$$

$$= 2\sigma_1^4 - 9\sigma_1^2\sigma_2 + 9\sigma_2^2.$$

Теперь последний многочлен решим относительно σ_2 .

$$9\sigma_2^2 - 9\sigma_2\sigma_1^2 + 2\sigma_1^4 = 0$$

Обозначим через $\sigma_2 = y$, тогда

$$9y^2 - 9y\sigma_1^2 + 2\sigma_1^4 = 0$$

$$a = 9, \quad b = 9\sigma_1^2, \quad c = 2\sigma_1^4$$

$$D = \sqrt{81\sigma_1^4 - 72\sigma_1^4} = \sqrt{9\sigma_1^4} = 3\sigma_1^2$$

$$y_1 = \sigma_2^{(1)} = -9\sigma_1^2 - 3\sigma_1^2 = -12\sigma_1^2$$

$$y_2 = \sigma_2^{(2)} = -9\sigma_1^2 + 3\sigma_1^2 = -6\sigma_1^2.$$

Согласно последнего имеем

$$9\sigma_2^2 - 9\sigma_2\sigma_1 + 2\sigma_1^4 = 9(\sigma_2 + 12\sigma_1^2)(\sigma_2 + 6\sigma_1^2),$$

Имея в виде $\sigma_2 = xy$, $\sigma_1 = x + y$ получим

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 9\sigma_2^2 - 9\sigma_2\sigma_1 + 2\sigma_1^4 = 9(\sigma_2 + 12\sigma_1^2)(\sigma_2 + 6\sigma_1^2) = \\ &= 9(xy + 12(x + y)^2)(xy + 6(x + y)^2) = \\ &= 9(12x^2 + 25xy + 12y^2)(xy + 6x^2 + 12xy + 6y^2) = \\ &= 9(12x^2 + 25xy + 12y^2)(6x^2 + 13xy + 6y^2) \end{aligned}$$

Первый множитель имеет комплексный корень, поэтому её оставляем без изменения

$$\begin{aligned} 6x^2 + 13xy + 6y^2 &= 6(x + 5y) \left(x + \frac{15}{3}y \right) = \\ &= (x + 5y)(3x + 20y) = 3(x + 5y)(x + 10y) \end{aligned}$$

Имея в виду последнее, окончательно получим

$$f(x, y) = 27(12x^2 + 25xy + 12y^2)(x + 5y)(x + 10y).$$

Литература

1. А.Э.Мадрахимов, М.Н.Мирзакаримова. Симметрик кўпхадларни тенгламалар системасини ечишга татбиқи. НамДУ илмий ахборотномаси, 2024 йил 6 сон.
2. А.Э.Мадрахимов. Симметрик кўпхадларни касрнинг махражини иррационалликдан қутқаришга татбиқи. НамДУ илмий ахборотномаси, 2024 йил (июн) 6 сон.
3. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М., 1962 г.