NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI, [2026-10]
ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427

01.00.00-FIZIKA-MATEMATIKA
journal.namdu.uz
PHYSICS AND MATHEMATICS

UO‘K 524.47:524.45

ЭМПИРИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ФИЗИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ СИСТЕМ ШАРОВЫХ СКОПЛЕНИЙ В КАРЛИКОВЫХ ГАЛАКТИКАХ

Tillaboyev Komiljon Tolqinovich
Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy Universiteti
ODCID: 0000-0002-9299-1854
E-mail: tillaboyev_k@nuu.uz
Tadjibayev Ikram Uralbayevich
Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy Universiteti
Chirchiq davlat pedagogika universiteti
ODCID: 0000-0003-2218-3584
E-mail: tadj_ikram@mail.ru

Аннотация: *Целью настоящего исследования является выявление эмпирических зависимостей между физическими характеристиками карликовых галактик и свойствами их систем шаровых скоплений. Исследование основано на выборке из 57 карликовых галактик с подтверждёнными популяциями шаровых скоплений, отобранных из ранее составленного каталога, включающего 722 карликовые галактики. В качестве основных параметров рассматривались общее количество шаровых скоплений, их удельная частота, звёздная масса галактик, абсолютная звёздная величина, металличность, эффективный радиус и центральная поверхностная яркость. Методология исследования включала корреляционный анализ Пирсона, простую линейную регрессию методом наименьших квадратов и множественную линейную регрессию. Полученные результаты выявили выраженную положительную связь между звёздной массой галактик и общим количеством шаровых скоплений. Установлено, что более массивные и яркие карликовые галактики, как правило, содержат больше шаровых скоплений, тогда как более высокие значения их удельной частоты характерны для некоторых малосветимых систем. Металличность также демонстрирует статистически значимые взаимосвязи с параметрами систем шаровых скоплений. Множественная линейная регрессионная модель объясняет приблизительно 71% дисперсии общего количества шаровых скоплений. Результаты исследования свидетельствуют о том, что масса звёздного компонента, химический состав и структурные характеристики галактик играют важную роль в объяснении наблюдаемого разнообразия систем шаровых скоплений. Полученные зависимости могут служить основой для дальнейшего изучения формирования и эволюции карликовых галактик.*

Ключевые слова: *карликовые галактики, шаровые скопления, системы шаровых скоплений, звёздная масса, металличность, удельная частота шаровых скоплений, корреляционный анализ, линейная регрессия.*

KARLIK GALAKTIKALARDAGI SHARSIMON YULDUZ TO‘DALARI TIZIMLARINING FIZIK XUSUSIYATLARI O‘RTASIDAGI EMPIRIK BOG‘LANISHLAR

Annotatsiya: *Ushbu tadqiqotning maqsadi karlik galaktikalarning fizik xususiyatlari va ulardagi sharsimon yulduz to‘dalari tizimlarining xossalari o‘rtasidagi empirik bog‘lanishlarni aniqlashdan iborat. Tadqiqot 722 ta karlik galaktikani o‘z ichiga olgan avval tuzilgan katalogdan tanlab olingan, sharsimon yulduz to‘dalari populyatsiyasi tasdiqlangan 57 ta karlik galaktika namunasiga asoslangan. Asosiy parametrlar sifatida sharsimon yulduz to‘dalarining umumiy soni va solishtirma chastotasi, galaktikalarning yulduz massasi, absolut yulduz kattaligi, metalliligi, effektiv radiusi hamda markaziy sirt yorqinligi ko‘rib chiqildi. Tadqiqot metodologiyasi Pirson korrelyatsion tahlili, eng kichik kvadratlar usuliga asoslangan oddiy chiziqli regressiya va ko‘p omilli chiziqli regressiyani o‘z ichiga oldi. Olingan natijalar galaktikalarning yulduz massasi bilan sharsimon yulduz to‘dalarining umumiy soni o‘rtasida yaqqol musbat bog‘lanish mavjudligini ko‘rsatdi. Aniqlanishicha, massasi kattaroq va yorqinroq karlik galaktikalarda, odatda, sharsimon yulduz to‘dalari soni ko‘proq bo‘ladi, ayrim kam yorqin tizimlarda esa ularning solishtirma chastotasi yuqoriroq bo‘ladi. Metallilik ham sharsimon yulduz to‘dalari tizimlarining parametrlari bilan statistik jihatdan ahamiyatli bog‘lanishlarni namoyon etdi. Ko‘p omilli chiziqli regressiya modeli sharsimon yulduz to‘dalarining umumiy sonidagi dispersiyaning taxminan 71 foizini tushuntiradi. Tadqiqot natijalari galaktikalarning yulduz komponenti massasi, kimyoviy tarkibi va strukturaviy xususiyatlari*

sharsimon yulduz to'dalari tizimlarining kuzatilayotgan xilma-xilligini izohlashda muhim rol o'ynashini ko'rsatadi. Aniqlangan bog'lanishlar karlik galaktikalarning shakllanishi va evolyutsiyasini keyingi tadqiq etish uchun asos bo'lib xizmat qilishi mumkin.

Kalit so'zlar: *karlik galaktikalar, sharsimon yulduz to'dalari, sharsimon yulduz to'dalari tizimlari, yulduz massasi, metallilik, sharsimon yulduz to'dalarining solishtirma chastotasi, korrelyatsion tahlil, chiziqli regressiya.*

EMPIRICAL RELATIONSHIPS BETWEEN THE PHYSICAL PROPERTIES OF GLOBULAR CLUSTER SYSTEMS IN DWARF GALAXIES

Abstract: *This study aims to identify empirical relationships between the physical properties of dwarf galaxies and the characteristics of their globular cluster systems. The study is based on a sample of 57 dwarf galaxies with confirmed globular cluster populations, selected from a previously compiled catalog containing 722 dwarf galaxies. The main parameters considered were the total number of globular clusters, globular cluster specific frequency, stellar mass, absolute magnitude, metallicity, effective radius, and central surface brightness of the host galaxies. The methodology included Pearson correlation analysis, simple linear regression using the ordinary least squares method, and multiple linear regression. The results revealed a pronounced positive relationship between the stellar mass of galaxies and the total number of globular clusters. More massive and luminous dwarf galaxies were generally found to host more globular clusters, whereas higher specific frequencies were characteristic of some low-luminosity systems. Metallicity also exhibited statistically significant relationships with globular cluster system parameters. The multiple linear regression model explained approximately 71% of the variance in the total number of globular clusters. The findings indicate that stellar mass, chemical composition, and structural properties of galaxies play important roles in explaining the observed diversity of globular cluster systems. The identified relationships may provide a basis for further investigations into the formation and evolution of dwarf galaxies.*

Keywords: *dwarf galaxies, globular clusters, globular cluster systems, stellar mass, metallicity, globular cluster specific frequency, correlation analysis, linear regression.*

Введение

Карликовые галактики являются одной из наиболее многочисленных популяций галактик во Вселенной и представляют собой важные лаборатории для изучения процессов формирования и эволюции галактик, тёмной материи и звездообразования. Благодаря малым звёздным массам и светимостям, а также относительно неглубоким гравитационным потенциалам эти системы особенно чувствительны как к внутренним механизмам обратной связи, так и к воздействию внешних факторов окружающей среды. Многие карликовые галактики в значительной степени доминируются тёмной материей, что делает их ценными объектами для ограничения распределения и гравитационного влияния тёмной материи [1]. Тем не менее, карликовые галактики представляют собой важнейшую область для наблюдательной проверки теоретических моделей холодной тёмной материи (Cold Dark Matter, CDM) и связанных с ней моделей формирования галактик. В частности, сохраняющиеся расхождения между теоретическими предсказаниями и наблюдениями карликовых галактик, включая проблемы слишком большого количества маломассивных спутников и концентрации, остаются важными препятствиями для понимания формирования галактик и природы тёмной материи [2–4].

В рамках иерархической модели формирования галактик карликовые галактики обычно рассматриваются как важнейшие компоненты истории сборки более массивных галактик. Считается, что крупные галактики, такие как Млечный Путь, по крайней мере частично сформировались в результате аккреции и слияния галактик меньшей массы [5–7]. В то же время неглубокие гравитационные потенциалы карликовых галактик делают их эволюцию особенно восприимчивой к воздействию окружающей среды, включая приливные взаимодействия и рам-давление (ram pressure), способное удалять газ. Истории звездообразования этих галактик также отличаются значительным разнообразием: они варьируются от систем, сформировавших большую часть своих звёзд на ранних этапах, до галактик с длительным звездообразованием. В сочетании с обычно низкой металличностью и относительно простыми структурами эти характеристики делают карликовые галактики удобными лабораториями для изучения звездообразования и химической эволюции в условиях, существенно отличающихся от условий в массивных галактиках [1].

Карликовые галактики также содержат важную информацию о ранних этапах космической эволюции. Многие близлежащие карликовые галактики представляют собой древние, маломассивные звёздные популяции, которые могут служить ископаемыми свидетельствами раннего звездообразования и химического обогащения, потенциально восходящими к эпохе реионизации [8]. Поскольку их звёздные массы невелики, дальнейшая эволюция этих галактик может существенно зависеть от энергетической обратной связи со стороны сверхновых и звёздных ветров, которые способны регулировать или подавлять звездообразование [9]. Последние достижения наблюдательной астрономии, включая использование космического телескопа James Webb и обсерватории имени Веры К. Рубин, значительно расширяют возможности обнаружения слабосветящихся карликовых галактик и определения характеристик их звёздных популяций и структурных свойств [10–12].

Несмотря на их важность, определение и классификация карликовых галактик остаются нетривиальными задачами. Они отличаются от гигантских галактик по звёздным массам, светимостям, распределению поверхностной яркости и структурным масштабным соотношениям [13–15]. Их чрезвычайно низкие светимости и поверхностные яркости также затрудняют наблюдательное исследование, особенно на больших расстояниях [16]. Кроме того, карликовые галактики представляют собой неоднородную популяцию, эволюционные свойства которой в значительной степени зависят от окружающей среды. Например, в Местной группе карликовые сфероидальные и карликовые эллиптические галактики преимущественно встречаются вблизи массивных галактик, тогда как карликовые неправильные галактики, богатые газом, и голубые компактные карликовые галактики чаще обнаруживаются в относительно изолированных условиях. Такие различия отражают неоднородность их морфологии, содержания газа, истории звездообразования и структурной эволюции. Поэтому эволюция карликовых галактик тесно связана с локальной окружающей средой.

Особенно ценным подходом к исследованию ранней эволюционной истории карликовых галактик является изучение их систем шаровых звёздных скоплений (ШЗС). Шаровые скопления представляют собой компактные гравитационно связанные звёздные системы, состоящие преимущественно из старых звёздных популяций, причём их свойства могут существенно отличаться от свойств галактик-хозяев [17–19]. Хотя размеры карликовых галактик могут составлять от сотен до тысяч парсеков, в них могут присутствовать несколько поколений звёзд с широким диапазоном металличности, тогда как отдельные ШЗС значительно компактнее и, как правило, содержат более старые звёздные популяции. Высокие отношения массы к светимости, наблюдаемые в некоторых карликовых галактиках, указывают на значительное содержание тёмной материи [20], тогда как шаровые скопления обычно не демонстрируют существенных свидетельств наличия тёмной материи в своих современных структурах [18]. Тем не менее, поскольку многие шаровые скопления сформировались на ранних этапах эволюции галактик, их популяции могут сохранять ценную информацию о процессах сборки галактик, звездообразования и химического обогащения в истории их галактик-хозяев. При этом различие между карликовыми галактиками и массивными звёздными скоплениями не всегда однозначно: некоторые компактные звёздные системы, такие как Омега Центавра, были предложены в качестве возможных остаточных ядер разрушенных карликовых галактик [21,22].

Фундаментальные свойства, формирование и эволюция карликовых галактик, а также их истории звездообразования, зависимость от окружающей среды и содержание тёмной материи были подробно рассмотрены в предыдущих исследованиях [23].

Изучение систем шаровых скоплений в карликовых галактиках особенно важно для понимания взаимосвязи между формированием звёздных скоплений и эволюционной историей маломассивных галактик [24,25]. Количество ШЗС существенно различается среди карликовых галактик: некоторые системы содержат мало скоплений или не имеют известных шаровых скоплений, тогда как другие обладают неожиданно богатыми популяциями скоплений относительно их звёздных светимостей [26,27]. Это разнообразие обычно количественно характеризуется общим числом шаровых скоплений и удельной частотой шаровых скоплений, причём последний параметр описывает содержание ШЗС, нормированное на светимость галактики-хозяина [27]. Эти величины предоставляют взаимодополняющую информацию о богатстве систем шаровых скоплений и их относительной значимости по сравнению со звёздным содержимым галактик-хозяев. Сама по себе удельная частота может зависеть от нелинейных соотношений с массой галактики-хозяина, что даёт основание предполагать, что связь между и абсолютной величиной может лучше описываться квадратичной зависимостью, а не простой линейной функцией [28].$N_{GC}S_NS_N$

Форма зависимости при малых массах галактик остаётся неопределённой. Одним из возможных объяснений является то, что масса системы шаровых скоплений приблизительно линейно связана с массой гало тёмной материи, тогда как зависимость массы гало от звёздной массы становится всё более нелинейной при малых звёздных массах. Следовательно, преобразование массы гало в звёздную массу естественным образом может приводить к нелинейной зависимости от звёздной массы галактики [19,29].S_NS_N

Предыдущие наблюдательные исследования показали, что популяции шаровых скоплений связаны с несколькими фундаментальными свойствами галактик-хозяев. В целом более массивные галактики, как правило, имеют более богатые системы ШЗС, что указывает на связь между формированием скоплений и общим масштабом роста галактик [27,30,31]. Однако эти отношения становятся более сложными в режиме карликовых галактик. В частности, удельная частота ШЗС демонстрирует значительную вариативность при малых массах галактик, а некоторые карликовые галактики с низкой светимостью обладают исключительно высокими значениями [27]. Исследования ультрадиффузных карликовых галактик также выявили значительное разнообразие количества ШЗС: некоторые системы демонстрируют неожиданно богатые популяции скоплений относительно своих звёздных масс [32]. Эти наблюдения позволяют предположить, что наблюдаемое сегодня распределение

популяций ШЗС в карликовых галактиках может отражать различия в эффективности формирования скоплений, истории сборки галактик, звездообразовании и эволюции окружающей среды.S_N

Данные

В настоящем исследовании изучаются статистические взаимосвязи между системами шаровых скоплений и физическими свойствами галактик-хозяев карликового типа. Анализ основан на выборке из 57 карликовых галактик с подтверждёнными популяциями шаровых скоплений, отобранных из ранее составленного нами каталога, включающего 722 карликовые галактики. Общие свойства полного каталога и подробный анализ его подвыборок карликовых эллиптических (dE) и карликовых неправильных (dIrr) галактик представлены в наших предыдущих исследованиях [23,33]. Параметры галактик-хозяев, используемые в настоящем анализе, а именно абсолютная звёздная величина в видимом диапазоне, звёздная масса, металличность, радиус половины светимости, центральная поверхностная яркость и масса нейтрального водорода, были взяты из ранее составленного нами каталога, содержащего 722 карликовые галактики [33]. Каталог был сформирован путём объединения измерений из литературы и общедоступных астрономических баз данных. Поскольку свойства галактик собирались из нескольких литературных источников, не все параметры доступны для каждой галактики.

Основная выборка и несколько ключевых параметров галактик были преимущественно получены из подробного обзора близлежащих карликовых галактик, выполненного McConnachie [34], с учётом обновлённых измерений из работы Kutilumaratov et al. [35]. Дополнительные измерения были получены из базы данных HyperLEDA [36], внегалактической базы данных NASA/IPAC [37], а также базы данных объектов Местного объёма. Если для определённого параметра имелось несколько измерений, преимущество отдавалось наиболее новым и однородным значениям. Все величины были приведены к единой согласованной системе единиц.

Методы

Корреляционный анализ

Для изучения взаимосвязей между физическими свойствами карликовых галактик и их популяциями шаровых скоплений использовался коэффициент корреляции Пирсона. Данная статистическая мера позволяет количественно оценить силу и направление линейной связи между парами непрерывных переменных. Коэффициент корреляции Пирсона выражается следующим образом:r

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

где и обозначают отдельные наблюдения, а и представляют собой соответствующие средние значения. Коэффициент изменяется от −1 до +1. Положительные и отрицательные значения указывают соответственно на положительную и отрицательную линейную зависимость, тогда как значения, близкие к нулю, свидетельствуют о слабой или отсутствующей линейной связи. Статистическая значимость каждой корреляции оценивалась с использованием двустороннего значения.$x_i y_i x_i y_i rp -$

Расчёт уравнений регрессии

Линейные зависимости между физическими параметрами определялись с использованием метода обыкновенных наименьших квадратов (Ordinary Least Squares, OLS). Данный метод позволяет оценить наилучшую аппроксимирующую регрессионную прямую путём минимизации суммы квадратов остатков между наблюдаемыми значениями и значениями, предсказанными моделью [38,39]. Для пар наблюдений линейная регрессионная модель может быть представлена в виде(x_i, y_i)

$$y = a + bx$$

где обозначает свободный член, а — наклон аппроксимирующей регрессионной прямой. Наклон и свободный член оценивались с использованием стандартных выражений метода наименьших квадратов:ab

$$b = \frac{n\ \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i\ \sum_i y_i}{n\ \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}$$

$$a = \frac{\sum_i y_i - b \sum_i x_i}{n}$$

где обозначает количество парных наблюдений, включённых в регрессионный анализ.n

В регрессионных анализах с одним предиктором свойства галактик последовательно рассматривались в качестве независимых переменных, тогда как или выступали в качестве зависимых переменных. Таким образом, регрессионные модели формулировались следующим образом:$(x) N_{GC} S_N(y)$

$$N_{GC} = a + bX\ ,\quad S_N = a + bX$$

где представляет собой соответствующее свойство галактики. Такой подход был принят для обеспечения согласованности статистических анализов и изучения того, как популяции шаровых скоплений изменяются в зависимости от свойств галактик.X

Результаты

Корреляционный анализ

Для исследования взаимосвязей между физическими свойствами карликовых галактик и их системами шаровых скоплений был проведён корреляционный анализ Пирсона. Коэффициент корреляции Пирсона использовался для количественной оценки силы и направления линейных взаимосвязей между переменными. Значения, близкие к +1, указывают на сильную положительную корреляцию, тогда как значения, близкие к −1, свидетельствуют о сильной отрицательной корреляции.rr

Пара переменных	r	Сила корреляции
$\log(M_*/M_\odot) - N_{GC}$	0.64	Strong positive
$M_V - N_{GC}$	-0.57	Strong positive
$[Fe/H] - N_{GC}$	0.53	Moderate positive
$N_{GC} - r_h$	0.275	Weak positive
$N_{GC} - \mu_V$	-0.479	Moderate positive
$\log(M_*/M_\odot) - S_N$	-0.66	Strong negative
$M_V - S_N$	0.62	Strong negative
$[Fe/H] - S_N$	-0.44	Moderate positive
$S_N - r_h$	-0.279	Weak positive
$S_N - \mu_V$	0.321	Moderate positive

Таблица 1. Коэффициенты корреляции Пирсона между свойствами галактик и параметрами шаровых скоплений.

Линейный регрессионный анализ

Коэффициенты корреляции Пирсона показывают, что общее количество шаровых скоплений положительно коррелирует со звёздной массой и металличностью, тогда как с абсолютной визуальной звёздной величиной наблюдается обратная зависимость. Наиболее сильная положительная корреляция выявлена со звёздной массой, в то время как корреляция с металличностью является умеренной. Связь между и абсолютной визуальной звёздной величиной отрицательная, что указывает на то, что галактики с более отрицательными значениями абсолютной звёздной величины, то есть с более высокой светимостью, как правило, содержат большее количество шаровых скоплений. Более слабые корреляционные связи обнаружены между и радиусом, содержащим половину светимости, а также между и центральной поверхностной яркостью.N_{GC} $r = 0.64 (r = 0.53) N_{GC} (r = -0.57) N_{GC} (r = 0.275) N_{GC} (r = -0.479)$

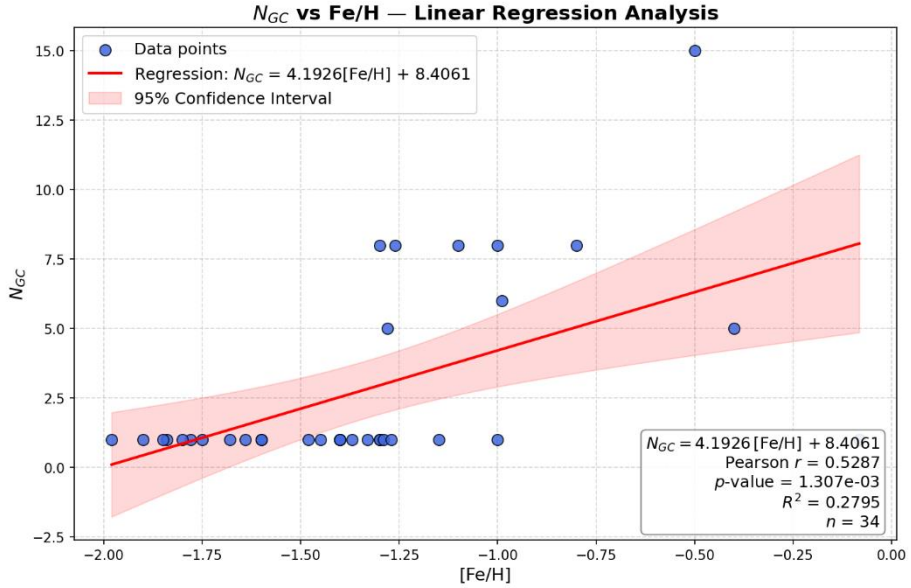


Рисунок 1. Линейная регрессия зависимости количества шаровых скоплений от металличности для карликовых галактик. Красная линия представляет наилучшую аппроксимацию линейной регрессией, а затенённая область соответствует 95%-му доверительному интервалу. $(N_{GC})\left(\left[\frac{Fe}{H}\right]\right)$

Шаровые скопления имеют иную закономерность распределения по удельной частоте. Наиболее сильная корреляция наблюдается между удельной частотой шаровых скоплений и звёздной массой, что свидетельствует об уменьшении относительной значимости систем шаровых скоплений с увеличением звёздной массы галактик. В отличие от этого, демонстрирует положительную корреляцию с абсолютной визуальной звёздной величиной, что означает, что более тусклые карликовые галактики, как правило, имеют более высокие значения удельной частоты. Умеренная отрицательная корреляция также обнаружена между и металличностью. Корреляции с радиусом, содержащим половину светимости, и центральной поверхностной яркостью являются сравнительно слабыми.$S_N\ r = -0.66 S_N\ r\ =\ 0.62 S_N r = -0.44 S_N r\ =\ -0.279 r\ =\ 0.321$

Корреляционный анализ был дополнен методом простой линейной регрессии. Связь между количеством шаровых скоплений и металличностью характеризуется умеренной положительной корреляцией при. Соответствующее уравнение регрессии имеет вид:$N_{GC} r\ =\ 0.53 p = 1.31 \times 10^{-3}$

$$N_{GC} = (4.19 \pm 11.19)[Fe/H] + (8.41 \pm 1.66)$$

при. Таким образом, одна лишь металличность объясняет приблизительно 28% наблюдаемого разброса количества шаровых скоплений. Несмотря на статистическую значимость выявленной зависимости, полученные результаты указывают на то, что дополнительные физические свойства вносят существенный вклад в наблюдаемое разнообразие популяций $R^2\ =\ 0.280$шаровых скоплений.

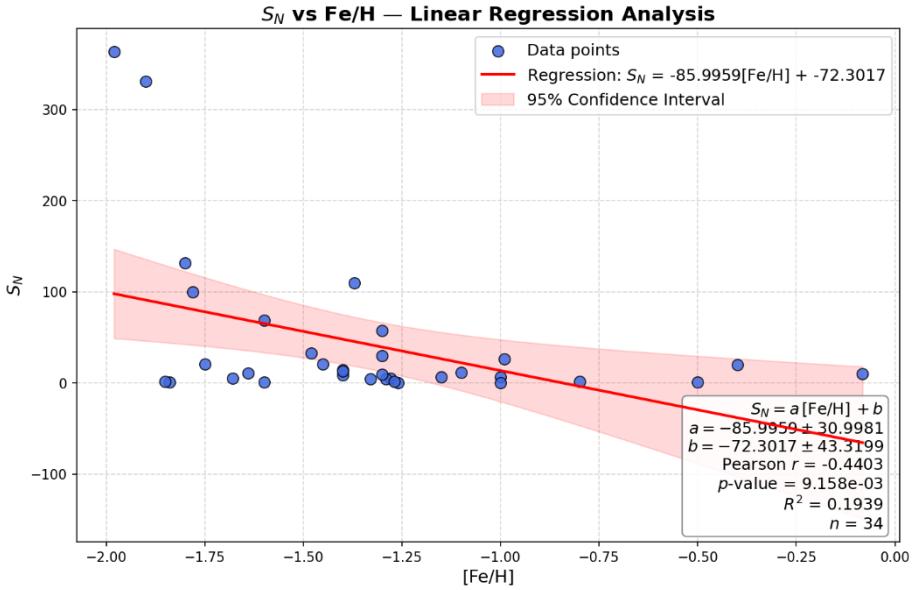


Рисунок 2. Линейная регрессия зависимости удельной частоты шаровых скоплений от металличности для карликовых галактик. Красная линия представляет наилучшую аппроксимацию линейной регрессией, а затенённая область соответствует 95%-му доверительному интервалу.(S_N)

Для удельной частоты шаровых скоплений выявлена отрицательная зависимость от металличности. Регрессионный анализ даёт и. Полученная аппроксимация имеет следующий вид:$r\ =\ -0.440 p\ =\ 9.16\ \times\ 10^{-3}$

$$S_N = (-86.00 \pm 31.00)[Fe/H] - (72.30 \pm 43.32)$$

при. Таким образом, металличность сама по себе объясняет приблизительно 19% вариации удельной частоты шаровых скоплений. Полученный результат указывает на то, что карликовые галактики с низкой металличностью могут обладать относительно высокими значениями удельной частоты шаровых скоплений. Однако было установлено, что две галактики с исключительно высокими значениями \(S_N\) оказывают существенное влияние на выявленную зависимость. После исключения галактик Canes Venatici I и Andromeda XVII коэффициент корреляции снизился до, при и, что демонстрирует чувствительность данной зависимости к характеристикам этих отдельных галактик.$R^2\ =\ 0.194 S_N r\ =\ -0.301 p\ =\ 0.094 R^2\ =\ 0.091$

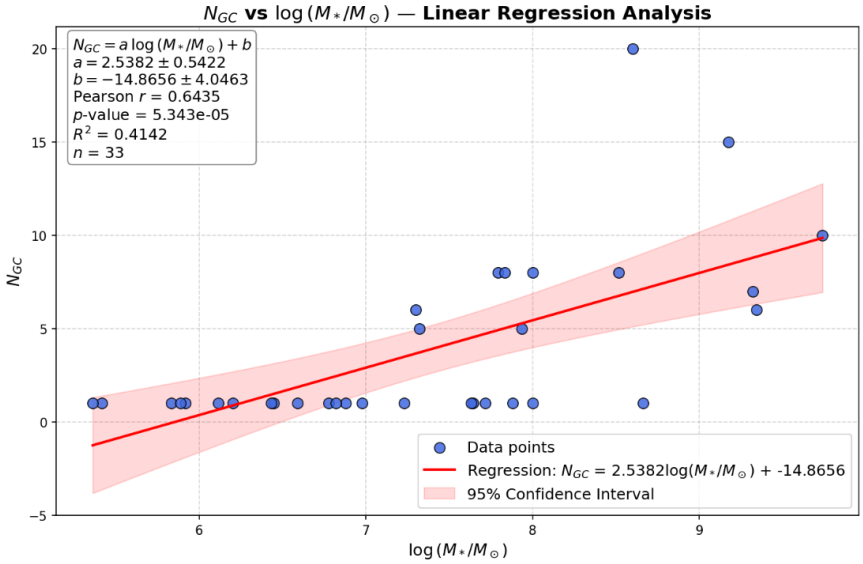


Рисунок 3. Линейная регрессия зависимости количества шаровых скоплений от звёздной массы для карликовых галактик. Красная линия представляет наилучшую аппроксимацию линейной регрессией, а затенённая область соответствует 95%-му доверительному интервалу. $(N_{GC})\log\left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)$

Более тесная зависимость выявлена между количеством шаровых скоплений и звёздной массой. Коэффициент корреляции Пирсона составляет при. Соответствующее уравнение линейной регрессии имеет вид: $r = 0.644 p = 5.34 \times 10^{-5}$

$$N_{\mathrm{GC}} = (2.54 \pm 0.54)\log\left(\frac{M_*}{M_\odot}\right) - (14.87 \pm 4.05),$$

при. Следовательно, одна лишь звёздная масса объясняет приблизительно 41% вариации общего количества шаровых скоплений. Этот результат указывает на то, что более массивные карликовые галактики, как правило, обладают более богатыми системами шаровых скоплений. $R^2 = 0.414$

Зависимость удельной частоты шаровых скоплений от звёздной массы становится значительно более выраженной после логарифмического преобразования. Для зависимости между и получены следующие значения:. $\log S_N \log\left(\frac{M_*}{M_\odot}\right) r = -0.942, p = 3.38 \times 10^{-16}, R^2 = 0.887$

Полученная регрессионная зависимость имеет вид:

$$\log S_N = (-0.7381 \pm 0.0474)\log\left(\frac{M_*}{M_\odot}\right) + (6.3161 \pm 0.3540)$$

которую можно представить в виде степенной зависимости:

$$S_N = 10^{6.3161}\left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)^{-0.7381} .$$

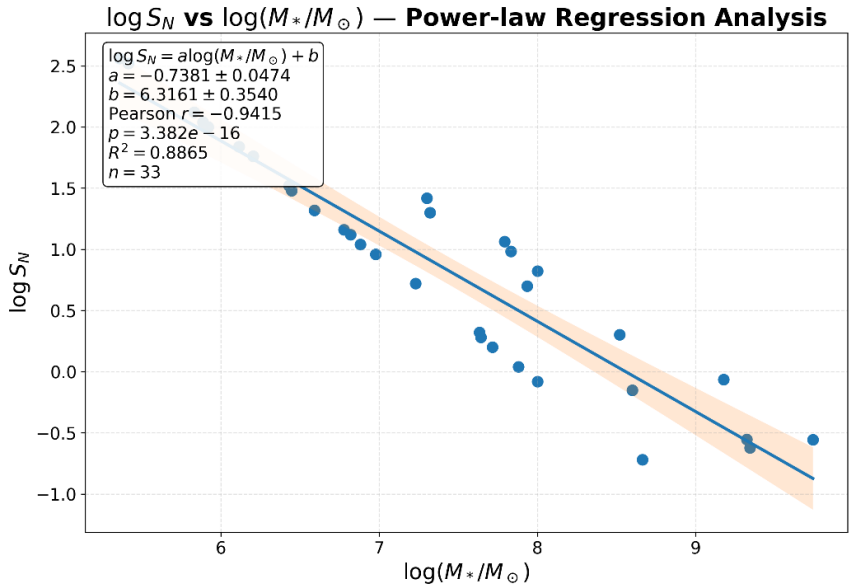


Рисунок 4. Линейная регрессия зависимости логарифма удельной частоты шаровых скоплений) от логарифма звёздной массы для карликовых галактик. ($\log S_N$)

Значительно более высокий коэффициент детерминации по сравнению с моделью, построенной в линейном пространстве, свидетельствует о том, что зависимость удельной частоты шаровых скоплений от звёздной массы более адекватно описывается степенной функцией. Отрицательный показатель степени указывает на закономерное снижение удельной частоты шаровых скоплений с увеличением звёздной массы галактик.S_N

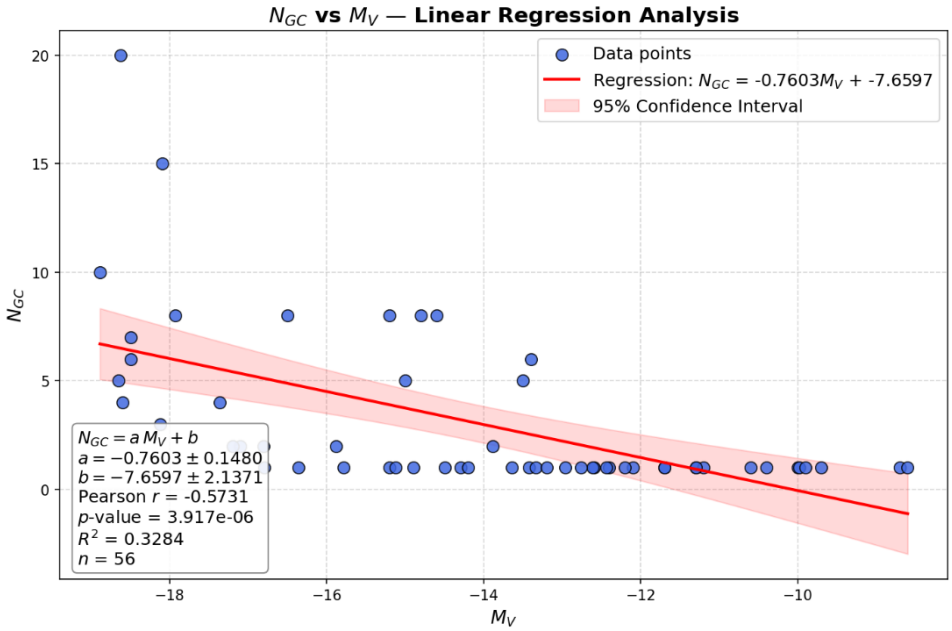


Рисунок 5. Линейная регрессия зависимости количества шаровых скоплений от абсолютной визуальной звёздной величины для карликовых галактик. $N_{GC}M_V$

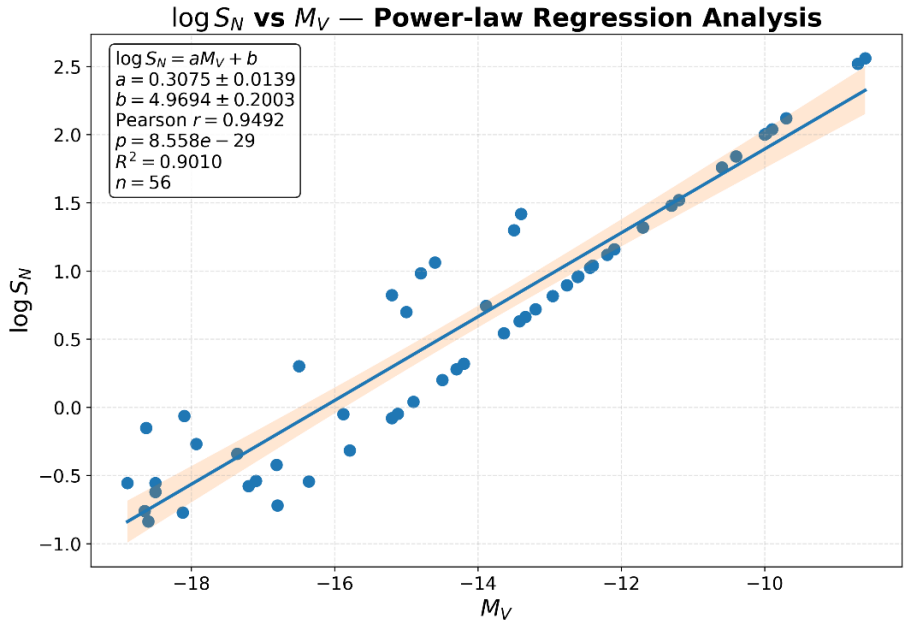
Аналогичная закономерность наблюдается при рассмотрении абсолютной визуальной звёздной величины. Количество шаровых скоплений демонстрирует отрицательную корреляцию с, при этом и. Уравнение регрессии имеет следующий вид:$M_V r = -0.573 p = 3.92 \times 10^{-6}$

$$N_{\mathrm{GC}} = (-0.760 \pm 0.148) M_V - (7.660 \pm 2.137),$$

при. Поскольку более яркие галактики имеют более отрицательные значения абсолютной звёздной величины, данный результат указывает на то, что более светимые карликовые галактики, как правило, содержат большее количество шаровых скоплений.$R^2 = 0.328$

В отличие от этого, удельная частота шаровых скоплений увеличивается по мере уменьшения яркости галактик. Логарифмическая регрессия между и даёт, и:$S_N M_V \; r = 0.949 p = 8.56 \times 10^{-29} R^2 = 0.901$

$$\log S_N = (0.3075 \pm 0.0139) M_V + (4.9694 \pm 0.2003).$$



С учётом логарифмического определения абсолютной звёздной величины эта зависимость соответствует соотношению $S_N \propto L_V^{-0.769}$.

Рисунок 6. Линейная регрессия зависимости логарифма удельной частоты шаровых скоплений от абсолютной визуальной звёздной величины для карликовых галактик. $(log\ S_N)(M_V)$

Таким образом, хотя более светимые карликовые галактики содержат большее абсолютное количество шаровых скоплений, их системы шаровых скоплений составляют относительно меньшую долю звёздного населения. Напротив, карликовые галактики с меньшей светимостью могут содержать меньше шаровых скоплений в абсолютном выражении, но характеризуются значительно более высокими значениями удельной частоты. Это различие между абсолютным количеством шаровых скоплений и их относительным содержанием является одной из основных закономерностей, выявленных в ходе статистического анализа.

На рисунке 7 представлена зависимость количества шаровых скоплений от радиуса, содержащего половину светимости, для карликовых галактик. При этом рассматривается в качестве зависимой переменной, а — в качестве независимой переменной. Регрессионный анализ выявляет слабую положительную корреляцию, что указывает на тенденцию к несколько большему количеству шаровых скоплений в карликовых галактиках с большими радиусами, содержащими половину светимости. Соответствующее уравнение наилучшей линейной аппроксимации имеет вид:$N_{GC} r_h r = 0.239\ r\ =\ 0.239, p = 1.10 \times 10^{-1}$

$$N_{GC} = (0.0006 \pm 0.0004) r_h + (1.9300 \pm 0.5716)$$

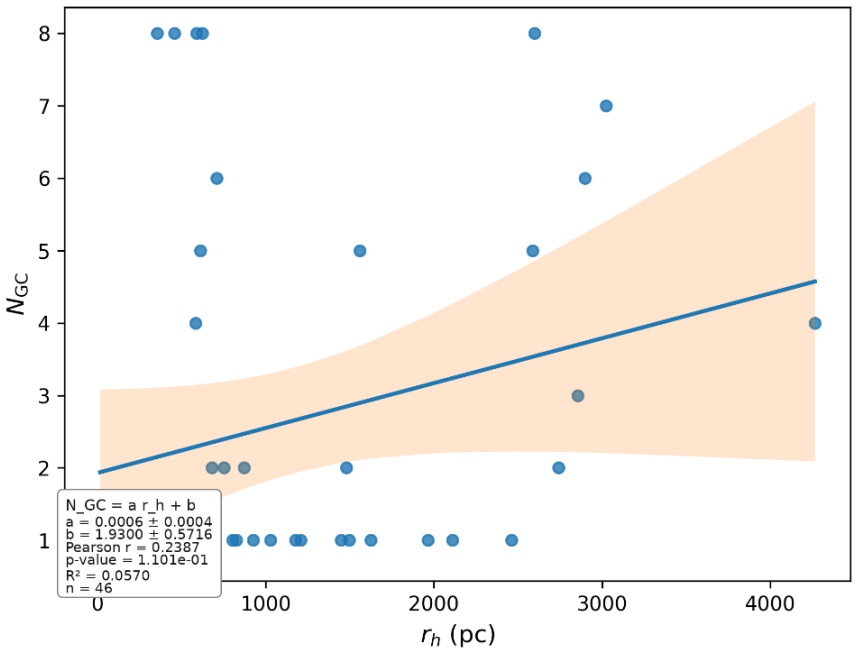


Рисунок 7. Линейная регрессия зависимости количества шаровых скоплений от радиуса, содержащего половину светимости, для карликовых галактик. $N_{GC} r_h$

Коэффициент детерминации показывает, что радиус, содержащий половину светимости, объясняет лишь около 6% наблюдаемой вариации количества шаровых скоплений. Тем не менее корреляция статистически незначима, что указывает на ограниченную объяснительную способность одного лишь радиуса, содержащего половину светимости, в отношении наблюдаемых различий в популяциях шаровых скоплений.$R^2\ =\ 0.057\ N_{GC}$

На рисунке 8 представлена зависимость удельной частоты шаровых скоплений от радиуса, содержащего половину светимости, для карликовых галактик. При этом рассматривается в качестве зависимой переменной, а — в качестве независимой переменной. Регрессионный анализ выявляет слабую отрицательную корреляцию что указывает на тенденцию к несколько меньшим значениям удельной частоты шаровых скоплений в карликовых галактиках с большими радиусами, содержащими половину светимости. Полученное уравнение наилучшей линейной аппроксимации имеет вид:$S_N r_h (r = -0.228,\ p = 1.27 \times 10^{-1})$,

$$S_N = (-0.0134 \pm 0.0086) r_h + (35.7949 \pm 12.9890)$$

Коэффициент детерминации свидетельствует о том, что радиус, содержащий половину светимости, объясняет приблизительно 5% вариации. Поскольку корреляция не достигает статистической значимости, один лишь радиус, содержащий половину светимости, позволяет лишь в ограниченной степени объяснить наблюдаемую вариацию удельной частоты шаровых скоплений.($R^2 = 0.052$) S_N

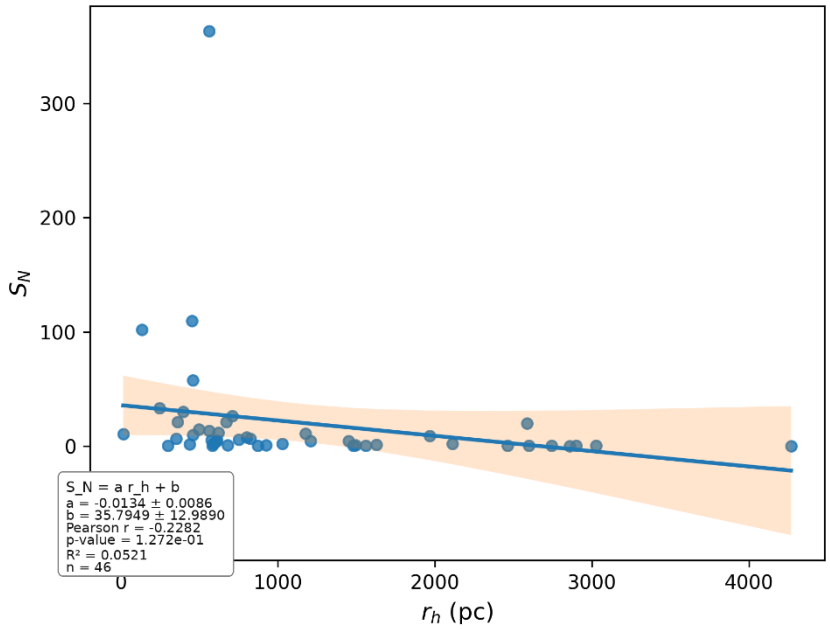


Рисунок 8. Линейная регрессия зависимости удельной частоты шаровых скоплений от радиуса, содержащего половину светимости, для карликовых галактик. $S_N r_h$

На рисунке 9 представлена зависимость количества шаровых скоплений от центральной поверхностной яркости карликовых галактик, где рассматривается в качестве зависимой переменной, а центральная поверхностная яркость — в качестве независимой переменной. Регрессионный анализ выявляет умеренную отрицательную корреляцию, что указывает на то, что карликовые галактики с более высокими значениями центральной поверхностной яркости, как правило, содержат меньше шаровых скоплений. Соответствующее уравнение наилучшей аппроксимации имеет вид:$N_{GC}(r = -0.455, p = 1.49 \times 10^{-3})$

$$N_{GC} = (-0.3250 \pm 0.0959)\mu_V + (9.9256 \pm 2.1722)$$

Коэффициент детерминации показывает, что приблизительно 21% наблюдаемой вариации количества шаровых скоплений может быть объяснено центральной поверхностной яркостью. Статистически значимая корреляция свидетельствует о наличии связи между поверхностной яркостью и популяцией шаровых скоплений, хотя значительная часть вариации остаётся необъяснённой влиянием одной лишь центральной поверхностной яркости.$N_{GC} N_{GC}$

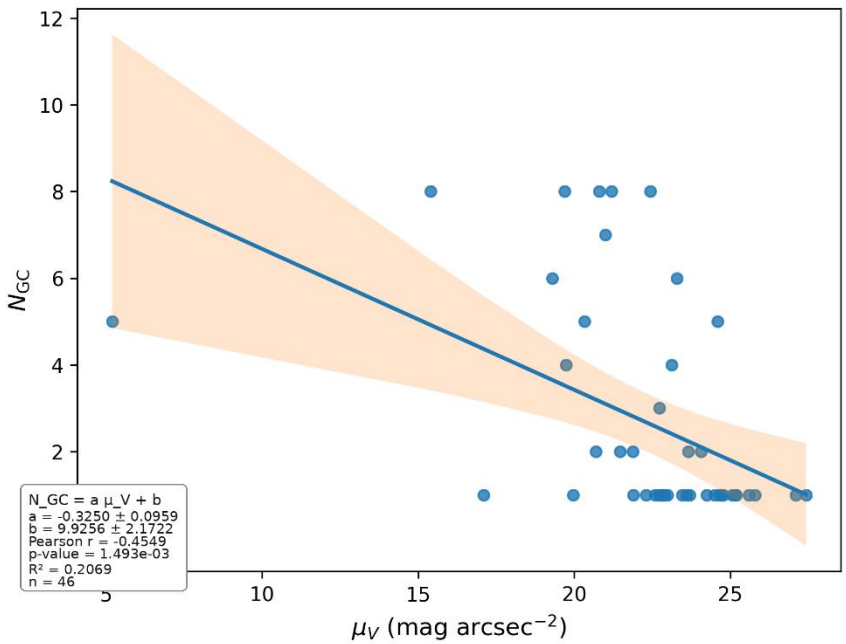


Рисунок 9. Линейная регрессия зависимости количества шаровых скоплений от центральной поверхностной яркости для карликовых галактик. N_{GC}

На рисунке 10 представлена зависимость удельной частоты шаровых скоплений от центральной поверхностной яркости карликовых галактик, где рассматривается в качестве зависимой переменной, а — в качестве независимой переменной. Регрессионный анализ выявляет слабую положительную корреляцию, что указывает на тенденцию к несколько более высоким значениям удельной частоты шаровых скоплений в карликовых галактиках с более высокими значениями. Соответствующее уравнение наилучшей аппроксимации имеет вид:$S_N \mu_V (r = 0.254, p = 8.80 \times 10^{-2}) \mu_V$

$$S_N = (4.1204 \pm 2.3611)\mu_V - (72.0506 \pm 53.4614).$$

Коэффициент детерминации показывает, что приблизительно 6% вариации может быть объяснено одной лишь центральной поверхностной яркостью. Однако корреляция статистически незначима, что свидетельствует о том, что сама по себе лишь в незначительной степени объясняет наблюдаемую вариацию удельной частоты $(R^2 = 0.065)$ S_N μ_Vшаровых скоплений.

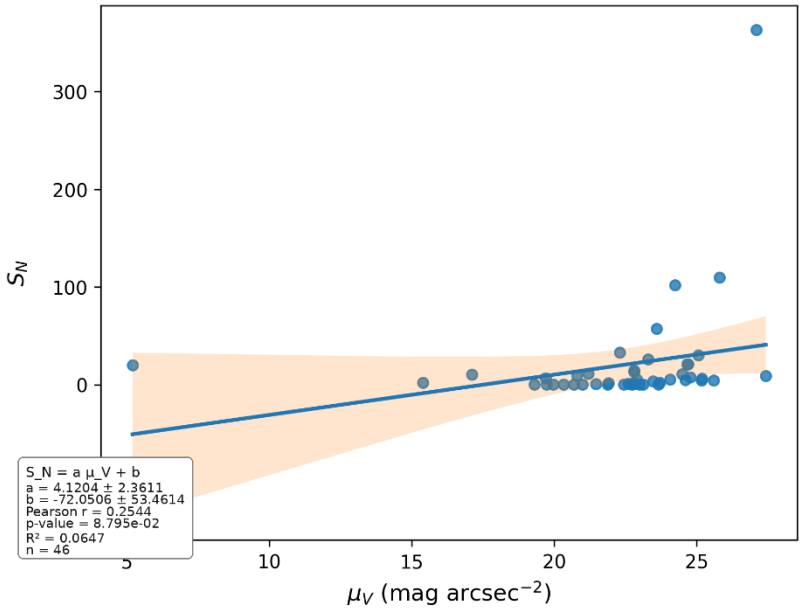


Рисунок 10. Линейная регрессия зависимости удельной частоты шаровых скоплений от центральной поверхностной яркости для карликовых галактик. S_N μ_V

Обсуждение

Представленный статистический анализ позволяет выявить взаимосвязи между системами шаровых скоплений (ШС) и физическими свойствами галактик-хозяев карликового типа. На основе корреляционного анализа и линейного регрессионного моделирования были исследованы зависимости между числом шаровых скоплений, их удельной частотой и основными физическими характеристиками галактик. Одним из наиболее выраженных результатов является положительная связь между массой звёздного компонента и числом шаровых скоплений. Корреляционный анализ и линейная регрессия показывают, что более массивные карликовые галактики, как правило, содержат более многочисленные системы ШС. Этот результат согласуется с предыдущими наблюдательными исследованиями, свидетельствующими о зависимости содержания ШС от массы и светимости галактики-хозяина [26,27,30,40,41].

Результаты множественного линейного регрессионного анализа дополнительно показывают, что масса звёздного компонента остаётся статистически значимым предиктором числа шаровых скоплений даже при одновременном учёте металличности, радиуса, содержащего половину светимости, и поверхностной яркости. Это указывает на то, что наблюдаемая связь между массой звёздного компонента и числом ШС не может быть полностью объяснена корреляциями между массой и другими включёнными в модель физическими параметрами галактик.N_{GC}

Обратная зависимость между абсолютной звёздной величиной и числом шаровых скоплений дополнительно подтверждает связь между масштабом галактики и численностью её системы ШС. Поскольку более ярким галактикам соответствуют более отрицательные значения, наблюдаемая отрицательная корреляция указывает на тенденцию более массивных и светимых карликовых галактик иметь большее количество ШС. Одновременно увеличение удельной частоты ШС в направлении более тусклых галактик согласуется с результатами предыдущих

исследований систем ШС в карликовых галактиках, согласно которым некоторые малосветимые галактики демонстрируют исключительно высокие значения. Следовательно, необходимо различать абсолютное количество ШС и их относительную распространённость по отношению к светимости галактики. Более массивные и яркие карликовые галактики могут содержать больше ШС в абсолютном выражении, тогда как в некоторых малосветимых системах ШС могут составлять относительно более значительную часть звёздного населения.$(M_V)N_{GC}(M_V)(S_N)(S_N)$

Металличность также демонстрирует значимые взаимосвязи с характеристиками систем ШС. Положительная корреляция между и указывает на тенденцию более металлообогащённых карликовых галактик в исследуемой выборке содержать больше шаровых скоплений. Такая зависимость может отражать общую связь между массой звёздного компонента и химическим обогащением, поскольку более массивные галактики обычно способны эффективнее удерживать продукты звёздного нуклеосинтеза. Однако металличность сохраняет статистическую значимость и в модели множественной линейной регрессии после учёта массы звёздного компонента и структурных параметров. Это предполагает, что химический состав может содержать дополнительную информацию об истории формирования и эволюции галактик и их систем ШС.$\left[\frac{Fe}{H}\right] N_{GC}$

В то же время отрицательная связь между металличностью и удельной частотой ШС указывает на то, что относительно бедные металлами карликовые галактики могут характеризоваться более высокими значениями, особенно после нормировки по светимости. Одно из возможных объяснений заключается в том, что маломассивные галактики могли сохранять или формировать относительно многочисленные системы ШС по отношению к своему современному звёздному населению. В более массивных и химически обогащённых галактиках звездообразование могло продолжаться дольше, увеличивая звёздную массу и светимость без пропорционального увеличения числа ШС. Подобное поведение качественно согласуется со сценарием, в котором значительная часть ШС формируется на ранних этапах эволюции галактик, до завершения основного химического обогащения [29]. Тем не менее эта интерпретация остаётся гипотезой, требующей дальнейшей проверки с использованием более крупных выборок и независимых оценок истории звездообразования.(S_N)

Множественная линейная регрессионная модель объясняет приблизительно 71% наблюдаемой дисперсии числа шаровых скоплений, при скорректированном коэффициенте детерминации. Таким образом, совокупность включённых в модель физических параметров обеспечивает существенное объяснение различий в численности систем ШС между исследуемыми галактиками. В то же время около 29% наблюдаемой дисперсии остаётся необъяснённой. Эта доля может быть связана с факторами, не включёнными в модель, в том числе с историей звездообразования, динамической эволюцией ШС, плотностью окружающей среды, приливными взаимодействиями и наблюдательными неопределённостями.N_{GC}

При интерпретации результатов необходимо учитывать несколько ограничений исследования. Во-первых, исходная выборка включает 57 карликовых галактик с подтверждёнными системами ШС. Количество объектов, для которых доступны все необходимые физические параметры, дополнительно ограничивает объём выборки, используемой в многопараметрическом анализе. Это снижает статистическую мощность исследования и ограничивает возможности обобщения полученных результатов на всю популяцию карликовых галактик. Во-вторых, каталог сформирован на основе многочисленных литературных источников, поэтому он представляет собой неоднородную наблюдательную выборку. Различия в методах наблюдений, оценках расстояний, критериях идентификации ШС и измерениях физических характеристик галактик могут приводить к дополнительному разбросу данных. В-третьих, современное количество ШС отражает результат как первоначального формирования скоплений, так и последующих процессов динамической и экологической эволюции, которые невозможно полностью восстановить исключительно по современным свойствам галактик.

В дальнейших исследованиях целесообразно использовать более крупные и однородные выборки, а также независимые оценки масс гало тёмной материи, параметров окружающей среды и истории звездообразования. Такие данные позволят точнее разграничить влияние первоначальной эффективности формирования ШС и последующих процессов динамической эволюции. Увеличение объёма выборки также позволит проверить устойчивость выявленных корреляций и оценить, насколько хорошо полученные линейные зависимости описывают системы ШС в различных подтипах карликовых галактик.

Выводы

В настоящем исследовании проведён комплексный статистический анализ взаимосвязей между физическими характеристиками карликовых галактик и свойствами их систем шаровых скоплений. Для выявления наиболее значимых зависимостей применялись корреляционный анализ и методы линейной регрессии, включая множественную линейную регрессионную модель. Полученные результаты позволяют сформулировать следующие основные выводы.

1. Масса звёздного компонента является одним из наиболее важных параметров, связанных с абсолютным количеством шаровых скоплений. Корреляционный анализ выявил выраженную связь между массой звёздного компонента и числом ШС. Результаты множественной линейной регрессии подтвердили статистическую значимость этой зависимости при одновременном учёте металличности и структурных характеристик галактик.

2. Абсолютная звёздная величина и удельная частота ШС характеризуют различные аспекты систем шаровых скоплений. Более яркие и массивные карликовые галактики, как правило, содержат больше ШС в абсолютном выражении. Вместе с тем более высокие значения удельной частоты (S_N) могут наблюдаться в малосветимых галактиках. Это подчёркивает необходимость совместного анализа абсолютного количества ШС и их относительной распространённости по отношению к светимости галактики.

3. Металличность демонстрирует дополнительные взаимосвязи со свойствами систем ШС. Положительная связь между и указывает на тенденцию более металлообогащённых галактик содержать больше шаровых скоплений. Отрицательная связь между металличностью и показывает, что относительно бедные металлами системы могут обладать более высокой удельной частотой ШС. Эти зависимости могут отражать совместное влияние массы галактики, химического обогащения и истории формирования звёздного населения.($[Fe/H]$)(N_{GC}) (S_N)

4. Структурные характеристики галактик вносят дополнительный вклад в объяснение наблюдаемого разнообразия систем ШС. В частности, эффективный радиус демонстрирует статистически значимую отрицательную связь с числом ШС в рамках множественной линейной регрессионной модели. Этот результат указывает на то, что различия в структуре галактик могут быть связаны с различиями в численности их систем ШС даже после учёта других включённых в модель физических параметров.

5. Множественная линейная регрессия обеспечивает существенное объяснение наблюдаемого разнообразия числа ШС. Модель объясняет приблизительно 71% дисперсии, а скорректированный коэффициент детерминации составляет. Масса звёздного компонента выступает основным предиктором среди рассмотренных параметров, тогда как металличность и эффективный радиус также вносят статистически значимый вклад. Диагностические проверки свидетельствуют об удовлетворительном соответствии модели основным статистическим предпосылкам.(N_{GC})($R^2_{adj} = 0.654$)

В целом результаты исследования показывают, что свойства систем шаровых скоплений в карликовых галактиках связаны прежде всего с массой звёздного компонента, химическим составом и структурными характеристиками галактик. Согласованность результатов корреляционного и регрессионного анализа повышает уверенность в выявленных статистических зависимостях. Однако наблюдаемые корреляции сами по себе не устанавливают причинно-следственные связи, а часть различий между системами ШС остаётся необъяснённой в рамках рассмотренной модели. Дальнейшие исследования с использованием более крупных и однородных выборок, а также независимых оценок массы гало тёмной материи, истории звездообразования и параметров окружающей среды позволят уточнить физическую интерпретацию выявленных зависимостей и глубже понять механизмы формирования и эволюции систем шаровых скоплений в карликовых галактиках.

Вклад авторов: все авторы внесли равный вклад в разработку концепции исследования, анализ данных и подготовку текста статьи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование: исследование выполнено без внешней финансовой поддержки.

Foydalanilgan adabiyotlar

1.Simon J. D. The Faintest Dwarf Galaxies // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. 2019. Т. 57, № 1. С. 375–415.

2.Del Popolo A., Le Delliou M. Review of Solutions to the Cusp-Core Problem of the ΛCDM Model // Galaxies. 2021. Т. 9, № 4. С. 123.

3.Venkatesan A. Finding the 99% Today: The Cosmological Role of Dwarf Galaxies. 2014. Т. 223. С. 226.04.

4.Strigari L. E. Galactic searches for dark matter // Physics Reports. 2013. Т. 531, № 1. С. 1–88.

5.White S. D. M., Rees M. J. Core condensation in heavy halos: a two-stage theory for galaxy formation and clustering // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1978. Т. 183, № 3. С. 341–358.

6.Springel V. и др. Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars // Nature. 2005. Т. 435, № 7042. С. 629–636.

7.Bullock J. S., Boylan-Kolchin M. Small-Scale Challenges to the ΛCDM Paradigm // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. 2017. Т. 55. С. 343–387.

8.Saviane I., Held E. V., Bertelli G. The stellar populations of the Fornax dwarf spheroidal galaxy. arXiv, 2000. Т. 355.

9.Revaz Y. и др. The dynamical and chemical evolution of dwarf spheroidal galaxies // A&A. 2009. Т. 501, № 1. С. 189–206.

10.Weisz D. R. и др. THE STAR FORMATION HISTORIES OF LOCAL GROUP DWARF GALAXIES. I. HUBBLE SPACE TELESCOPE /WIDE FIELD PLANETARY CAMERA 2 OBSERVATIONS // ApJ. 2014. Т. 789, № 2. С. 147.

11.McQuinn Kristen. B. W. и др. The JWST Resolved Stellar Populations Early Release Science Program. IV. The Star Formation History of the Local Group Galaxy WLM // ApJ. 2024. Т. 961, № 1. С. 16.

12.Weisz D. R. и др. The JWST Resolved Stellar Populations Early Release Science Program. V. DOLPHOT Stellar Photometry for NIRCam and NIRISS // The Astrophysical Journal Supplement Series. IOP, 2024. Т. 271. С. 47.

13.Benítez-Llambay A. и др. DWARF GALAXIES AND THE COSMIC WEB // ApJ. 2013. Т. 763, № 2. С. L41.

14.Yang H. и др. An automatic detection method for small size dwarf galaxy candidates // A&A. 2025. Т. 696. С. A130.

15. Tammann G. A. Dwarf Galaxies in the Past. 1994. Т. 49. С. 3.

16.Hammer D. M. Dwarf Galaxies in the Coma Cluster: Star Formation Properties and Evolution.: Ph.D. Thesis. Baltimore, MD, USA: The Johns Hopkins University, 2012. 166 с.

17.Harris W. E. A Catalog of Parameters for Globular Clusters in the Milky Way // The Astronomical Journal. IOP, 1996. Т. 112. С. 1487.

18.Gratton R. G., Carretta E., Bragaglia A. Multiple populations in globular clusters: Lessons learned from the Milky Way globular clusters // Astron Astrophys Rev. 2012. Т. 20, № 1. С. 50.

19.Forbes D. A. и др. Keck/KCWI spectroscopy of globular clusters in local volume dwarf galaxies // Publications of the Astronomical Society of Australia. 2024. Т. 41. С. e044.

20.Tolstoy E., Hill V., Tosi M. Star-Formation Histories, Abundances, and Kinematics of Dwarf Galaxies in the Local Group // Annu. Rev. Astron. Astrophys. 2009. Т. 47, № 1. С. 371–425.

21.Bekki K., Freeman K. C. Formation of ω Centauri from an ancient nucleated dwarf galaxy in the young Galactic disc: Formation of ω Centauri // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2003. Т. 346, № 2. С. L11–L15.

22.Tadjibaev I. U., Nuritdinov S. N., Ganiev J. M. Globular Star Cluster Systems Around Galaxies. II. Spiral and Dwarf Galaxies // Astrophysics. 2015. Т. 58, № 2. С. 181–192.

23.Tillaboev K. и др. Dwarf Galaxies in Focus: A Survey of Observational and Theoretical Studies // Galaxies. 2025. Т. 13, № 5. С. 117.

24.Tadjibaev I. U., Nuritdinov S. N., Muminov A. A. Non-Linear Cosmology of Globular Cluster Systems around Galaxies // Ukr. J. Phys. 2018. Т. 62, № 12. С. 1057.

25.Nuritdinov S. N., Tadjibaev I. U. Globular Star Cluster Systems Around Galaxies. I. Search for Statistical Relationships // Astrophysics. 2014. Т. 57, № 1. С. 59–69.

26.Georgiev I. Y. и др. Globular cluster systems in nearby dwarf galaxies - I. HST /ACS observations and dynamical properties of globular clusters at low environmental density // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2009. Т. 392, № 2. С. 879–893.

27.Georgiev I. Y. и др. Globular cluster systems in nearby dwarf galaxies - III. Formation efficiencies of old globular clusters: Formation efficiences of old GCs // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2010. С. no-no.

28.Tadjibaev I. U. ON THE PROBLEM OF THE SPECIFIC FREQUENCY OF GLOBULAR CLUSTERS // Eureka: PE. 2021. № 2. С. 137–142.

29.Choksi N., Gnedin O. Y., Li H. Formation of globular cluster systems: from dwarf galaxies to giants // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2018. Т. 480, № 2. С. 2343–2356.

30.Beasley M. A. и др. A new way to measure the distance to NGC1052-DF2 // A&A. 2025. Т. 697. С. A144.

31.El-Badry K. и др. The formation and hierarchical assembly of globular cluster populations // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2019. Т. 482, № 4. С. 4528–4552.

32.Lim S. и др. The Globular Cluster Systems of Ultra-diffuse Galaxies in the Coma Cluster // ApJ. 2018. Т. 862, № 1. С. 82.

33.Tillaboev K. и др. Statistical Relationships among the Physical Properties of Dwarf Galaxies // Res. Astron. Astrophys. 2026. Т. 26, № 11. С. 115024.

34.McConnachie A. W. THE OBSERVED PROPERTIES OF DWARF GALAXIES IN AND AROUND THE LOCAL GROUP // The Astronomical Journal. 2012. Т. 144, № 1. С. 4.

35.Kutlimuratov S., Tadjibaev I., Nuritdinov S. Special summary catalog of dwarf galaxies in Universe up to distance 121 Mpc // UJP. 2019. Т. 22, № 4. С. 203–217.

36.Makarov D. и др. HyperLEDA. III. The catalogue of extragalactic distances // Astronomy and Astrophysics. EDP, 2014. Т. 570. С. A13.

37.NASA/IPAC Extragalactic Database [Электронный ресурс]. URL: https://ned.ipac.caltech.edu/ (дата обращения: 25.08.2026).

38.Taylor J. Introduction to Error Analysis, the Study of Uncertainties in Physical Measurements, 2nd Edition // Published by University Science Books. 1997.

39.Bevington P. R. Data reduction and error analysis for the physical sciences. Boston: McGraw-Hill, 2003. 342 с.

40.Dornan V., Harris W. E. Globular Cluster Systems in Dwarf Galaxies: Catalogs and Comparisons // ApJ. 2026. Т. 998, № 1. С. 41.

41.Berek S. C. *и др.* The HERBAL Model: A Hierarchical Errors-in-variables Bayesian Lognormal Hurdle Model for Galactic Globular Cluster Populations // ApJ. 2023. Т. 955, № 1. С. 22.