NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI, [2026-10]
ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427

01.00.00-FIZIKA-MATEMATIKA
journal.namdu.uz
PHYSICS AND MATHEMATICS

УДК 517.98

ГРАДИЕНТНЫЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ БЛЮМА-КАПЕЛЯ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ С ЧЕТНЫМ РАДИУСОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ: СЛУЧАЙ «ПЕТЛЯ»

Xatamov Nosirjon Muydinovich
Namangan davlat universiteti, fizika-matematika fanlari doktori, dotsent
ORCID: 0000-0002-2902-7982
nxatamov@mail.ru

Аннотация: *Работа посвящена градиентным мерам Гиббса (ГМГ) для модели Блюма-Капеля со счетным множеством* Z *значений спина в случае «петля» на деревьях Кэли с четным радиусом взаимодействия. Эта модель определяется потенциалом взаимодействия градиента ближайшего соседа. Используя аргумент Кульске-Шрайвера, основанный на уравнениях граничного закона, мы даем несколько* q *-периодических трансляционно-инвариантных ГМГ для* $q = 2,3$ *с четным радиусом взаимодействия.*

Ключевые слова: *модель Блюма-Капеля, конфигурация, дерево Кэли, мера Гиббса, градиентные меры Гиббса, граничный закон.*

JUFT O‘ZARO TA’SIR RADIUSIGA EGA KEYLI DARAXTIDAGI BLUME-CAPEL MODELI UCHUN GRADIENT GIBBS O‘LCHOVLARI: «SIRTMOQ» HOLATI

Annotatsiya: *Ushbu maqola juft o‘zaro ta’sir radiusiga ega bo‘lgan Keli daraxtlaridagi «sirtmoq» holatida, sanoqli sondagi spin qiymatlariga ega Blume-Capel modeli uchun gradient Gibbs o‘lchovlariga (GGO‘) bag‘ishlangan. Mazkur model eng yaqin qo‘shnilar orasidagi gradient o‘zaro ta’sir potensiali yordamida aniqlanadi. Chegara qonuniyati tenglamalariga asoslangan Kulske-Schrieber yondashuvidan foydalanib, biz juft o‘zaro ta’sir radiusiga ega bo‘lgan holatda* $q = 2,3$ *qiymatlari uchun bir nechta* q *-davriy va siljishga nisbatan invariant bo‘lgan GGO‘larni keltirib chiqaramiz.*

Kalit so‘zlar: *Blyum-Kapel modeli, konfiguratsiya, Keli daraxti, Gibbs o‘lchovi, gradient Gibbs o‘lchovlari, chegaraviy qonun.*

GRADIENT GIBBS MEASURES FOR THE BLUME-CAPEL MODEL ON A CAYLEY TREE WITH EVEN INTERACTION RADIUS: THE «HINGE» CASE

Abstract: *This paper is devoted to gradient Gibbs measures (GGMs) for the Blume-Capel model with a countable set of spin values in the «hinge» case on Cayley trees with an even interaction radius. This model is defined by a nearest-neighbor gradient interaction potential. Using a Kulske-Schrieber argument based on boundary law equations, we present several* q *-periodic translation-invariant GGMs for* $q = 2,3$ *with an even interaction radius.*

Keywords: *Blume-Capel model, configuration, Cayley tree, Gibbs measure, gradient Gibbs measures, boundary law.*

1 Введение

Известно, что макроскопические физические системы, находящиеся в термодинамическом равновесии, описываются мерами Гиббса, которые определяются через гамильтониан системы [6], [15]. У данного гамильтониана может быть несколько различных мер Гиббса; в этом случае говорят, что имеет место сосуществование фаз. Это соответствует фазовым переходам первого рода, когда несколько фаз термодинамически устойчивы при одном и том же значении соответствующих параметров (температуры, давления и т.п.)

Для моделей (гамильтонианов), заданных на решетках малой размерности, известно (см. [4], [5], [19]), что мер Гиббса бесконечного объема не существует. Однако фиксации поля в начале координат достаточно, чтобы иметь четко определенный термодинамический предел в любом измерении ([4], [19]). Результирующее поле полностью характеризуется своими градиентами. Эти бесконечно большие случайные градиентные поля называются градиентными мерами Гиббса или состояниями Функи-Спона [5] (подробнее о мотивах и последних результатах см. [1], [2], [7] -[12], [17], [18], [20]).

Эта статья посвящена ГМГ модели Блюма-Капеля и спина из множества всех целых чисел на деревьях Кэли.

1.1 Определения и известные результаты

Пусть $\Gamma^k = (V, L)$ - однородное дерево Кэли, каждая вершина которого имеет $k+1$ соседей, где V - множество вершин, а L - множество ребер ([16]).

Для любой конфигурации $\omega = (\omega(x))_{x\in V} \in \mathrm{Z}^V$ и ребра $b = \langle x, y\rangle$ Γ^k *разность* вдоль ребра b определяется выражением $\nabla\omega_b = \omega(y) - \omega(x)$, где ω_b - конфигурация на $b = \langle x, y\rangle$, т. е. $\omega_b = \{\omega(x), \omega(y)\}$. Переменные градиентного спина определяются как $\eta_{\langle x,y\rangle} = \omega(y) - \omega(x)$ для каждого $\langle x, y\rangle$ (см. [12], [13]).

Пространство *градиентных конфигураций* обозначается Ω^{∇}. Измеримая структура на пространстве Ω^{∇} задается σ-алгеброй

$$\mathrm{F}^{\nabla} := \sigma(\{\eta_b | b \in \vec{L}\}).$$

Пусть $\mathrm{T}_{\Lambda}^{\nabla}$ - сигма-алгебра градиентных конфигураций вне конечного объема Λ, порожденная всеми градиентными переменными вне Λ и относительной разность высот на границе Λ.

Для потенциала взаимодействия с ближайшими соседями $\Phi = (\Phi_b)_b$, где $b = \langle x, y\rangle$ - ребро, определим симметричные передаточные матрицы Q_b формулой

$$Q_b(\omega_b) = e^{-\Phi_b(\omega_b)} = \exp\left(-\beta V(\omega(x) - \omega(y))\right). \qquad (1)$$

Такой потенциал Φ называется *градиентным потенциалом взаимодействия*.

Следуя [12] и [13], дадим определение ГМГ. Определим марковскую (гиббсовскую) спецификацию как

$$\gamma_{\Lambda}^{\Phi}(\sigma_{\Lambda} = \omega_{\Lambda} \mid \omega) = (Z_{\Lambda}^{\Phi})(\omega)^{-1} \prod_{b\cap\Lambda\neq\varnothing} Q_b(\omega_b).$$

Определение 1. Спецификация градиента Гиббса определяется как семейство ядер вероятностей $\left(\gamma_{\Lambda}^{'}\right)_{\Lambda \mathrm{P} V}$ от $\left(\Omega^{\nabla}, \mathrm{T}_{\Lambda}^{\nabla}\right)$ до $\left(\Omega^{\nabla}, \mathrm{F}^{\nabla}\right)$ такое, что

$$\int F(\rho)\gamma_{\Lambda}^{'}(d\rho \mid \zeta) = \int F(\nabla\varphi)\gamma_{\Lambda}(d\varphi \mid \omega)$$

для всех ограниченных F^{∇}-измеримых функций F, где $\omega \in \Omega$ - *любая* конфигурация высоты с $\nabla\omega = \zeta$

.

Определение 2. Вероятностная мера ν на Ω^{∇} называется ГМГ, если она удовлетворяет уравнению DLR

$$\int \nu(d\zeta)F(\zeta) = \int \nu(d\zeta)\int \gamma_{\Lambda}^{'}(d\tilde{\zeta} \mid \zeta)F(\tilde{\zeta})$$

для каждого конечного $\Lambda \subset V$ *и для всех ограниченных функций* F на Ω^{∇}.

Граничные законы (см. [20]), которые позволяют описать подмножество $\mathrm{G}(\gamma)$ всех мер Гиббса.

Определение 3.

• Семейство векторов $\{l_{xy}\}_{\langle x,y\rangle\in\vec{L}}$ с $l_{xy} = \left(l_{xy}(i) : i \in \mathrm{Z}\right) \in (0,\infty)^{\mathrm{Z}}$ называется граничным законом *для* трансфер-операторов $\{Q_b\}_{b\in\vec{L}}$, если *для* каждого $\langle x, y\rangle \in \vec{L}$ существует константа $c_{xy} > 0$ такая, что уравнение согласованности

$$l_{xy}(i) = c_{xy} \prod_{z\in\partial x\setminus\{y\}} \sum_{j\in\mathrm{Z}} Q_{zx}(i, j)l_{zx}(j) \qquad (2)$$

выполняется *для* каждого $i \in \mathrm{Z}$.

• Граничный закон l называется нормализуемым тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i\in\mathrm{Z}} \left(\prod_{z\in\partial x} \sum_{j\in\mathrm{Z}} Q_{zx}(i, j)l_{zx}(j)\right) < \infty \qquad (3)$$

при любом $x \in V$.

• Граничный закон называется q *-периодическим по высоте* (или q -периодическим), если $l_{xy}(i+q) = l_{xy}(i)$ для каждого ориентированного ребра $\langle x, y\rangle \in \vec{L}$ и каждый $i \in \mathrm{Z}$.

Известно, что существует взаимно однозначное соответствие между нормализуемыми граничными законами и цепями Маркова с древовидными индексами [20].

В [8], [9], [10], [12] для получения ГМГ используются некоторые ненормализуемые граничные законы.

Для $\Lambda \subset V$ зафиксируем $w \in \Lambda$. Если предположить, что граничный закон l является q -периодическим по высоте, то возьмем $s \in \mathrm{Z}_q = \{0,1,\ldots,q-1\}$ и определим вероятность измерения $\nu_{w,s}$ в $\mathrm{Z}^{\{b\in\vec{L}|b\subset\Lambda\}}$ по

$$\nu_{w,s}(\eta_{\Lambda\cup\partial\Lambda} = \zeta_{\Lambda\cup\partial\Lambda}) = Z^{\Lambda}_{w,s} \prod_{y\in\partial\Lambda} l_{yy_\Lambda}(T_q(s + \sum_{b\in\Gamma(w,y)} \zeta_b)) \prod_{b\cap\Lambda\neq\varnothing} Q_b(\zeta_b),$$

где $Z^{\Lambda}_{w,s}$ - константа нормализации, $\Gamma(w,y)$ - единственный путь от w до y и $T_q : \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}_q$ обозначает смежную проекцию.

Теорема 1. *Пусть* $(l_{\langle xy\rangle})_{\langle x,y\rangle\in\vec{L}}$ *- любой* q *-периодический (по высоте) граничный закон для некоторого градиентного потенциала взаимодействия. Зафиксируем любую вершину* $w \in V$ *и любую метку класса* $s \in \mathrm{Z}_q$. *Тогда*

$$\nu_{w,s}(\eta_{\Lambda\cup\partial\Lambda} = \zeta_{\Lambda\cup\partial\Lambda}) = Z^{\Lambda}_{w,s} \prod_{y\in\partial\Lambda} l_{yy_\Lambda}(T_q(s + \sum_{b\in\Gamma(w,y)} \zeta_b)) \prod_{b\cap\Lambda\neq\varnothing} Q_b(\zeta_b) \quad (4)$$

дает согласованное семейство вероятностных мер на градиентном пространстве Ω^{∇}. Здесь Λ с $w \in \Lambda \subset V$ - любое конечное связное множество, $\zeta_{\Lambda\cup\partial\Lambda} \in \mathrm{Z}^{\{b\in\vec{L}|b\subset(\Lambda\cup\partial\Lambda)\}}$ и $Z^{\Lambda}_{w,s}$ - константа нормализации.

Мера $\nu_{w,s}$ называется мерой закрепленного градиента.

Если q -периодический по высоте граничный закон и лежащий в его основе потенциал трансляционно-инвариантны, то можно получить вероятностную меру ν на градиентном пространстве, смешивая закрепленные градиентные меры:

Теорема 2. *Пусть* q *-периодический по высоте граничный закон* l *и его градиентный потенциал взаимодействия трансляционно-инвариантны. Пусть* $\Lambda \subset V$ *- любое конечное связное множество, а* $w \in \Lambda$ *- любая вершина. Тогда мера* ν *с маргиналами, заданными формулой*

$$\nu(\eta_{\Lambda\cup\partial\Lambda} = \zeta_{\Lambda\cup\partial\Lambda}) = Z_\Lambda \left(\sum_{s\in\mathrm{Z}_q} \prod_{y\in\partial\Lambda} l(s + \sum_{b\in\Gamma(w,y)} \zeta_b) \right) \prod_{b\cap\Lambda\neq\varnothing} Q(\zeta_b), \quad (5)$$

где Z_Λ - константа нормализации, определяет трансляционно-инвариантный ГМГ на Ω^{∇}.

Целью данной работы является исследование ГМГ градиентного потенциала, построенных по модели Блюма-Капеля. По теореме 2 каждый q -периодический по высоте граничный закон l определяет трансляционно-инвариантный ГМГ. Мы находим $q = 2,3$-периодические по высоте граничные законы для этой модели Блюма-Капеля и используем теорему 2 для построения ГМГ, соответствующих этим законам.

1.2 Уравнение граничного закона для модели Блюма-Капеля.

В этом подразделе для $\sigma : x \in V \mapsto \sigma(x) \in \mathrm{Z}$ рассмотрим гамильтониан модели Блюма-Капеля, т.е.

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle, x,y\in V;} (\sigma(x) - \sigma(y))^2, \quad (6)$$

где $J \in \mathrm{R}$.

Мы рассматриваем множество Z как множество вершин графа G. Мы используем граф G для определения G-допустимой конфигурации следующим образом.Конфигурация σ называется G-*допустимой конфигурацией* на дереве Кэли, если $\{\sigma(x),\sigma(y)\}$ является ребром графа G для любой пары ближайших соседей x, y в V. Через Ω^G обозначим множество G-допустимых конфигураций.

Пусть $L(G)$ - множество ребер графа G. Обозначим через $A \equiv A^G = (a_{ij})_{i,j\in\mathrm{Z}}$ матрицу смежности графа G, т.е.

$$a_{ij} = a_{ij}^G = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i,j\} \in L(G), \\ 0, & \text{если } \{i,j\} \notin L(G). \end{cases}$$

Для любых $y \in V$ и $x \in S(y)$ (так что $d(x^0,y) = d(x^0,x) - 1$) *для* удобства обозначений положим

$$z_{i,x} := l_{xy}(i), \qquad i \in \mathrm{Z}. \qquad (7)$$

Предположим, что $z_{0,x} = l_{xy}(0) \equiv 1$, тогда уравнение граничного закона (2), соответствующее нашей модели на G-допустимых конфигурациях, в силу новое обозначение (7) становится (см. [3])

$$z_{i,x} = \prod_{y\in S(x)} \frac{a_{i0}\theta^{i^2} + \sum_{m\in\mathrm{Z}_0} a_{im}\theta^{(i-m)^2} z_{m,y}}{a_{00} + \sum_{m\in\mathrm{Z}_0} a_{0m}\theta^{m^2} z_{m,y}}, \quad (8)$$

где $i \in \mathrm{Z}$, $\theta = \exp(J\beta)$.

В общем, решить систему (8) очень сложно. Сложность зависит от структуры графа G (см. рис.1). В этой статье мы выбираем граф G, определяемый равенством

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \ i = j \ \text{ или } \ |i-j| = r, \ i,j \in \mathrm{Z}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

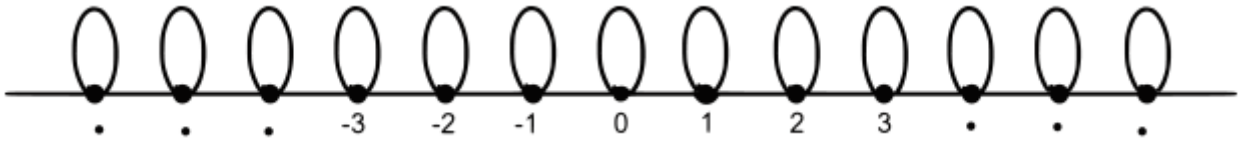


Figure 1: Граф G с множеством вершин Z.

2 Случай: радиус взаимодействия четный. Трансляционно-инвариантные меры

Пусть $r-$ четное натуральное число.

Для этого конкретного графа из (8) мы получаем

$$z_{i,x} = \prod_{y\in S(x)} \frac{\theta^r z_{i,y} + z_{i-r,y} + z_{i+r,y}}{\theta^r + z_{-r,y} + z_{r,y}}, i \in \mathrm{Z}_0 \quad (9)$$

В этом разделе мы найдем некоторые постоянные решения (9), т. е. $z_x = z \in \mathrm{R}_+^\infty$ не зависит от вершин дерева Кэли. В этом случае из (9) получаем

$$z_i = \left(\frac{\theta^r z_i + z_{i-r} + z_{i+r}}{\theta^r + z_{-r} + z_r} \right)^k, \ i \in \mathrm{Z}_0. \qquad (10)$$

здесь $\theta > 0, z_i > 0, z_0 = 1$.

2.1 2-периодическое решение (10)

В (10) мы предполагаем

$$z_j = \begin{cases} 1, \text{ если } j \text{ четно}, \\ y, \text{ если } j \text{ не четно}. \end{cases}$$

Тогда мы получаем

$$y = y^k. \qquad (11)$$

Это уравнение имеет единственное положительное решение $y = 1.$

Обозначим соответствующие решения системы (11) как

$$(1,1) \text{ при } \theta > 0. \qquad (12)$$

По теореме 2 каждый 2-периодический по высоте граничный закон определяет трансляционно-инвариантный ГМГ. Таким образом, решения (12) позволяют сформулировать следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $k \geq 2$. Тогда для гамильтониана (6) на пространстве G-допустимых конфигураций с графом G в случае $r \in \{2N\}$, число $\nu_2(k,\theta)$ 2- периодические по высоте ГМГ задаются следующей формулой*

$$\nu_2(k,\theta) = 1, \ \theta > 0.$$

2.2 3-периодические решения (10)

В этом пункте нас интересует нахождение 3-периодических решений системы (10), которые имеют вид

$$z_j = \begin{cases} 1, \text{ если } j \equiv 0 \bmod 3, \\ x, \text{ если } j \equiv 1 \bmod 3, \\ y, \text{ если } j \equiv 2 \bmod 3. \end{cases} \qquad (13)$$

Замечание 1. *Заметим, что, если $r \in \{12N\} \bigcup \{12N+6\}$, т.е. r кратно только 6 или 12, то число 3-периодических по высоте ГМГ задается следующей формулой*

$$\nu_3(k,\theta) = 1, \text{ если } \theta > 0,$$

соответствующее решению $(1,1).$

Пусть $r \in \{12N+2\} \bigcup \{12N+4\} \bigcup \{12N+8\} \bigcup \{12N+10\}$. Тогда система уравнений (10) принимает вид:

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{1+y+\theta^r x}{\theta^r + x + y} \right)^k, \\ y = \left(\dfrac{1+x+\theta^r y}{\theta^r + x + y} \right)^k. \end{cases} \qquad (14)$$

Удивительно, но эта система уравнений совпадает с системой (3.2) в [14], которая описывает трансляционно-инвариантные меры Гиббса модели Поттса с q-состояниями. Наша система (14) является частным случаем, соответствующим $q = 3.$

По теореме 1 из [14] для $q = 3$ имеем

Лемма 1. *Пусть $k \geq 2$, $\theta_{cr} = \sqrt[r]{\dfrac{k+2}{k-1}}$. Тогда для системы (14) существует $\theta = \theta_{c,1}$ такое, что $\theta_{cr} > \theta_{c,1}$ и справедливо следующее*

- *Если $\theta < \theta_{c,1}$, то существует единственное решение: $(1,1)$;*
- *Если $\theta = \theta_{c,1}$ или $\theta = \theta_{cr}$, то существуют 4 решений:*

$$(1,1),(x_1^{(3)},x_1^{(3)}),(1,x_3^{(3)}),(x_3^{(3)},1);$$

• *Если* $\theta > \theta_{c,1}$, $\theta \neq \theta_{cr}$, *то существуют 7 решений:*

$$(1,1),(x_1^{(3)},x_1^{(3)}),(x_2^{(3)},x_2^{(3)}),(1,x_3^{(3)}),(x_3^{(3)},1),(1,x_4^{(3)}),(x_4^{(3)},1).$$

Замечание 2. *Заметим, что (см. [8] и [10]), если периодический по высоте граничный закон получается из другого циклическим сдвигом, то он приводит к тому же самому ГМГ.*

Теперь по лемме 1, замечанию 2 и теореме 2 получаем следующий результат.

Теорема 4. *Для модели (6) с графом* G *в случае* $r \in \{12N+2\}\bigcup\{12N+4\}\bigcup\{12N+8\}\bigcup\{12N+10\}$, *число* $\nu_3(k,\theta)$ *3-периодических по высоте (вида (13)) ГМГ задается следующей формулой*

$$\nu_3(k,\theta)=\begin{cases}1, \text{ если } \theta<\theta_{c,1},\\ 3, \text{ если } \theta=\theta_{c,1},\theta_{cr},\\ 5, \text{ если } \theta\in(\theta_{c,1},\infty)\setminus\{\theta_{cr}\}.\end{cases}$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. M. Biskup and R. Kotecký: Phase coexistence of gradient Gibbs states, Probab. Theory Related Fields, 139(1-2) (2007), 1–39.

2. R. Bissacot, E. O. Endo and A. C. D. van Enter: Stability of the phase transition of critical-field Ising model on Cayley trees under inhomogeneous external fields, Stoch. Process. Appl. 127(12) (2017), 4126–4138.

3. L. V. Bogachev and U. A. Rozikov: On the uniqueness of Gibbs measure in the Potts model on a Cayley tree with external field. J. Stat. Mech. Theory Exp. (2019), no. 7, 073205, 76 pp.

4. S. Friedli and Y. Velenik, Statistical mechanics of lattice systems. A concrete mathematical introduction, Cambridge University Press, Cambridge, 2018. xix+622 pp.

5. T. Funaki, H. Spohn, Motion by mean curvature from the Ginzburg-Landau $\nabla\Phi$ interface model. Comm. Math. Phys. 185(1), (1997) 1-36.

6. H. O. Georgii: Gibbs Measures and Phase Transitions, Second edition. de Gruyter Studies in Mathematics, 9. Walter de Gruyter, Berlin, 2011.

7. F.H. Haydarov, U.A. Rozikov, Gradient Gibbs measures of a SOS model on Cayley trees: 4-periodic boundary laws. arXiv:2110.10078 [math-ph]. To appear in Reports on Mathematical Physics.

8. F. Henning, C. Külske, A. Le Ny and U. A. Rozikov: Gradient Gibbs measures for the SOS model with countable values on a Cayley tree, Electron. J. Probab. 24 (2019), Paper No. 104, 23 pp.

9. F. Henning and C. Külske: Existence of gradient Gibbs measures on regular trees which are not translation invariant, arXiv:2102.11899 [math.PR]

10. F. Henning and C. Külske: Coexistence of localized Gibbs measures and delocalized gradient Gibbs measures on trees. Ann. Appl. Probab. 31(5) (2021), 2284-2310.

11. F. Henning, Gibbs measures and gradient Gibbs measures on regular trees. PhD thesis. Ruhr-University, Bochum, 2021. 109 pages.

12. C. Külske and P. Schriever: Gradient Gibbs measures and fuzzy transformations on trees, Markov Process. Relat. Fields, 23, (2017), 553-590.

13. C. Külske: Stochastic Processes on Trees. 2017. Lecture Notes available on https://www.ruhr-uni-bochum.de/imperia/md/content/mathematik/kuelske/stoch-procs-on-trees.pdf

14. C. Külske, U.A. Rozikov, R.M. Khakimov: Description of the translation-invariant splitting Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree. J. Stat. Phys. 156(1) (2014), 189-200.

15. C. Preston: Gibbs States on Countable Sets. Cambridge Univ. Press, 1974.

16. U. A. Rozikov: Gibbs measures on Cayley trees. World Sci. Publ. Singapore. 2013.

17. U. A. Rozikov: Mirror symmetry of height-periodic gradient Gibbs measures of a SOS model on Cayley trees. arXiv:2203.11446 [math-ph].

18. S. Sheffield: Random surfaces: Large deviations principles and gradient Gibbs measure classifications. Thesis (Ph.D.)-Stanford University. 2003. 205 pp.

19. Y. Velenik, Localization and delocalization of random interfaces. Probab. Surv. 3, (2006), 112-169.

20. S. Zachary: Countable state space Markov random fields and Markov chains on trees, Ann. Probab. 11(4) (1983), 894–903.