NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI, [2026-10]
ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427

01.00.00-FIZIKA-MATEMATIKA
journal.namdu.uz
PHYSICS AND MATHEMATICS

YARIM CHEKSIZ QIRRALI YULDUZSIMON GRAFDA VAZNLI δ'-ULANISHLI SHREDINGER TENGLAMASI UCHUN KOSHI MASALASINING INTEGRAL YECHIMI

Eshimbetov Mardonbek Reyimboyevich
Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti dotsenti
ORCID: 0000-0002-5254-5104
E-mail: mr.eshimbetov@nuu.uz

Annotatsiya: *Maqolada ta yarim cheksiz qirrali yulduzsimon grafda bir jinsli bo‘lmagan Shredinger tenglamasi uchun Koshi masalasi qaraladi. Graf uchida yechim qiymatlarining yig‘indisi nolga teng, vaznli hosilalar esa o‘zaro teng deb olinadi. Bu shartlar nol parametrli -ulanishni ifodalaydi. Ularga mos akslantirish matritsasi topilib, yechimning integral formulasi hosil qilinadi. Masalaning bitta Dirixle va ta Neyman masalasiga ajralishidan foydalanib, vaznli Gilbert fazosida operatorning o‘z-o‘ziga qo‘shmaligi hamda yechimning mavjudligi va yagonaligi isbotlanadi. Fokas usuli bilan olingan kontur formula ham shu yechimni berishi fazoda ko‘rsatiladi. Bunda kontur integrallari uchun olingan tekis baho manba qatnashgan hadni asoslashda ishlatiladi. Uch qirrali grafda aniq yechim tuzilib, integral formula va massa saqlanishi sonli hisoblashlar yordamida tekshiriladi.*$n\delta' n-1L^2$

Kalit so‘zlar: *Shredinger tenglamasi; metrik graf; vaznli* δ'*-ulanish; Fokas usuli; integral yadro; unitar guruh; Dirixle-Neyman ajralishi.*

ИНТЕГРАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ВЗВЕШЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ δ'-СОПРЯЖЕНИЯ НА ЗВЁЗДНОМ ГРАФЕ С ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ РЁБРАМИ

Аннотация: *В статье рассматривается задача Коши для неоднородного уравнения Шрёдингера на звёздном графе с полубесконечными рёбрами. В вершине графа сумма значений решения равна нулю, а взвешенные производные совпадают. Эти условия соответствуют -сопряжению с нулевым параметром. Найдена соответствующая матрица отражения и получена интегральная формула решения. На основе разложения исходной задачи на одну задачу Дирихле и задач Неймана доказаны самосопряжённость оператора во взвешенном гильбертовом пространстве, а также существование и единственность решения. В пространстве установлено, что контурная формула, полученная методом Фокаса, задаёт то же решение. При этом равномерная оценка контурных интегралов используется для обоснования слагаемого, содержащего источник. Для графа с тремя рёбрами построено точное решение; интегральная формула и сохранение массы проверены с помощью численных расчётов.*$n\delta' n-1L^2$

Ключевые слова: *уравнение Шрёдингера; метрический граф; взвешенное* δ'*-сопряжение; метод Фокаса; интегральное ядро; унитарная группа; разложение Дирихле-Неймана.*

INTEGRAL SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE SCHRÖDINGER EQUATION WITH WEIGHTED δ'-COUPLING CONDITIONS ON A STAR GRAPH WITH SEMI-INFINITE EDGES

Abstract: *This paper considers the Cauchy problem for the inhomogeneous Schrödinger equation on a star graph with semi-infinite edges. At the vertex, the solution values sum to zero, while the weighted derivatives coincide. These conditions describe coupling with a zero coupling parameter. The corresponding reflection matrix is derived, and an integral formula for the solution is obtained. By decomposing the problem into one Dirichlet problem and Neumann problems, the self-adjointness of the operator in a weighted Hilbert space, together with the existence and uniqueness of the solution, is established. The contour formula obtained by the Fokas method is shown to represent the same solution in. A uniform estimate for the contour integrals is used to justify the source contribution in this representation. An exact solution is constructed for a graph with three edges, and the integral formula and mass conservation are verified numerically.*$n\delta' n-1L^2$

Keywords: *Schrödinger equation; metric graph; weighted coupling; Fokas method; integral kernel; unitary group; Dirichlet-Neumann decomposition.*δ'

Kirish

Metrik grafda Shredinger tenglamasini qaraganda, har bir qirradagi yechim graf uchlarida berilgan shartlar orqali boshqa qirralardagi yechimlar bilan bog‘lanadi. Shu sababli masalaning xossalari differensial tenglamaga ham, ulanish shartlariga ham bog‘liq. Kvant graflarning umumiy nazariyasi va tatbiqlari [1] monografiyada bayon qilingan. Graf uchidagi o‘z-o‘ziga qo‘shma ulanish shartlari va ularga mos sochilish matritsalari [2] ishda o‘rganilgan.

Odatdagi Kirxgoff shartlarida yechim graf uchida uzluksiz bo‘lib, tashqi hosilalar yig‘indisi nolga teng bo‘ladi. Anti-Kirxgoff shartlarida esa qiymat va hosilalarning o‘rni almashadi: hosilalar o‘zaro teng, qiymatlar yig‘indisi nol bo‘ladi [3]. Biz shu shartlarning vaznli ko‘rinishini qaraymiz. Hosilalarga qo‘yilgan vaznlarga mos ravishda skalyar ko‘paytma ham vazn bilan olinadi. Bu fazoda chegaraviy hadlar nolga aylanadi va bir jinsli masalada yechimning vaznli normasi saqlanadi.

Yechimning integral ko‘rinishini topishda Fokas usulidan foydalanamiz [4]. Bu usulda tenglama avval lokal ayniyat ko‘rinishida yoziladi, so‘ng integrallash orqali boshlang‘ich va chegaraviy qiymatlarni bog‘lovchi global munosabat olinadi. Ulanish shartlari shu munosabatdagi noma’lum chegaraviy qiymatlarni yo‘qotish uchun xizmat qiladi. Fokas usuli tarmoqlardagi issiqlik tenglamasiga [5], sodda metrik graflardagi Shredinger tenglamasiga esa [6] ishda qo‘llangan. Jumladan, [6] da uchta yarim cheksiz qirrali graf uchun bir jinsli tenglama vaznli Kirxgoff shartlari bilan qaralgan.

Chegaraviy masalalarni yechishning Fokas umumlashgan almashtirish usuli bugungi kunda yangi, rivojlanib kelayotgan usullardan biridir. Bu usul A.Fokas[6-7], D.Smith, B.Pelloni, D.Bernard[15], N.Sheilslar tomonidan chekli va cheksiz intervalarda chiziqli va nochiziqli tenglamalar uchun qator boshlang‘ich va chegaraviy masalalar yechishga qo‘llanilgan[15-16]. Metrik grafda Fokas usuli issiqlik tarqalish tenglamasi uchun birinchi marotaba D.Smith va N.Sheilslar tomonidan yulduzsimon va ketma-ket ulangan, turli o‘tkazuvchanlikka ega bo‘lgan kesmalar, aylana va uning bitta nuqtasida kesmani ulashdan hosil bo‘lgan graflarda boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni yechish uchun qo‘llanilgan. Shu bilan birga, grafning tarmoqlanish nuqtasi, ya’ni ichki uchida ulanish (Kirxgoff) shartlari fizika nuqtai-nazaridan asoslab berilgan.

Quyida qirralar soni ixtiyoriy bo‘lgan grafda tashqi manbali tenglamani nol parametrli vaznli -ulanish bilan o‘rganamiz. Asosiy hisoblash ulanish shartlariga mos akslantirish matritsasini topishdan boshlanadi. Shu matritsa bir tomondan yechimning integral yadrosini beradi, ikkinchi tomondan esa masalani Dirixle va Neyman masalalariga ajratadi. Bu ajralishdan mavjudlik va yagonalikni isbotlashda foydalanamiz.$n\delta'$

Kontur formulani avval silliq funksiyalar uchun olamiz, keyin uni operator baholari yordamida fazoda asoslaymiz. Bunda manba hadidagi limitni vaqt integrali ostiga kiritish masalasi ham qaraladi. Oxirida integral formula uch qirrali grafdagi aniq yechim bilan taqqoslanadi.L^2

2. Masalaning qo‘yilishi va funksional fazolar

2.1 Graf va ulanish shartlari

$n \geq 2$ ta qirraning chap uchlarini bitta nuqtada birlashtirib, yulduzsimon grafni hosil qilamiz. Har bir qirrada koordinata uchdan tashqariga yo‘nalgan; hosilalar ham shu yo‘nalishda olinadi. Berilgan, va sonlar uchun quyidagi masalani qaraymiz: $B_j \simeq [0,\infty) O\Gamma x O q_x^{(j)}(0,t) T > 0 \sigma > 0 \delta_j > 0$

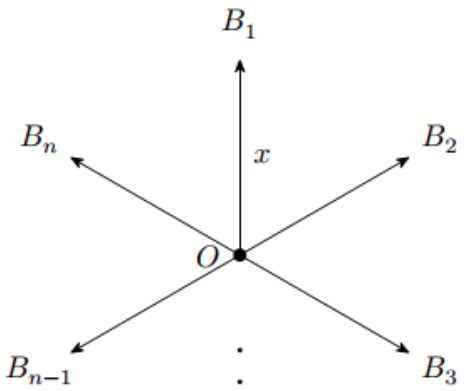
$$i\partial_t q^{(j)}(x,t) = \sigma \partial_x^2 q^{(j)}(x,t) + f^{(j)}(x,t), x > 0, \quad 0 < t \leq T, \text{ (2.1)}$$

$$q^{(j)}(x,0) = q_0^{(j)}(x), x > 0, \quad j = 1,\dots,n, \qquad \text{(2.2)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} q^{(j)}(0,t) = 0, 0 \leq t \leq T, \text{(2.3)}$$

$$\delta_1^2 q_x^{(1)}(0,t) = \cdots = \delta_n^2 q_x^{(n)}(0,t), 0 \leq t \leq T. \quad \text{(2.4)}$$

Bu yerda boshlang‘ich funksiya, esa berilgan manbadir.$q_0 = (q_0^{(1)},\dots,q_0^{(n)})^\top f = (f^{(1)},\dots,f^{(n)})^\top$



1-chizma. ta yarim cheksiz bog‘lamli yulduzsimon graf$nB_j \cong (0,\infty)\Gamma$

(2.3)–(2.4) shartlar nol parametrli vaznli -ulanishni ifodalaydi. Umumiy vaznli hosilani deb olsak, bu shartning holidir. Barcha vaznlar teng bo‘lganda anti-Kirxgoff shartlarini olamiz.$\delta' c(t) = \delta_j^2 q_x^{(j)}(0,t) \sum_j q^{(j)}(0,t) = \beta c(t)\beta = 0$

Izoh 2.1 (2.1) tenglamada deb belgilasak, hosil bo‘ladi. Shuning uchun yechim orqali ifodalanadi. holni kompleks qo‘shma olish bilan musbat koeffitsiyentli holga keltirish mumkin:„.$\mathcal{A} = -\sigma\partial_x^2 iq_t = -\mathcal{A}q + fe^{it\mathcal{A}}\sigma < 0q \mapsto \overline{q}f \mapsto -\overline{f}q_0 \mapsto \overline{q_0}$

2.2 Vaznli fazo va yechim tushunchalari

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\Delta = diag(\delta_1^2, \dots, \delta_n^2), \qquad v_j = \delta_j^{-2}, \quad v = (v_1, \dots, v_n)^\top, \quad V = \mathbf{1}^\top v = \sum_{j=1}^n v_j, \qquad (2.5)$$

bunda. da norma olinadi. Vaznli Gilbert fazosi$\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\top \mathbb{C}^n |a|_\Delta^2 = a^* \Delta a$

$$\mathcal{H} = L_\delta^2(\Gamma) = L^2((0,\infty); \mathbb{C}_\Delta^n), \qquad \langle u, w\rangle_\delta = \sum_{j=1}^n \delta_j^2 \int_0^\infty \overline{u^{(j)}(x)}\, w^{(j)}(x)\, \mathrm{d}x \qquad (2.6)$$

ko‘rinishda aniqlanadi. Skalyar ko‘paytma birinchi argument bo‘yicha qo‘shma chiziqli, unga mos norma esa tenglik bilan beriladi. Yana quyidagi belgilashlardan foydalanamiz:$\|u\|_\delta^2 = \langle u, u\rangle_\delta$

$$H^2(\Gamma) = \bigoplus_{j=1}^n H^2(0,\infty), \qquad \|u\|_{1,\Delta} = \int_0^\infty |u(x)|_\Delta \, \mathrm{d}x.$$

Vaznlar musbat va ularning soni chekli. Shu sababli vaznli norma odatdagi vektor normaga ekvivalent.

Fazoviy operatorni

$$\mathcal{A}u = -\sigma u'', \qquad (2.7)$$

$$D(\mathcal{A}) = \{u \in H^2(\Gamma) : \mathbf{1}^\top u(0) = 0, \quad u'(0) \in span\{v\}\} \qquad (2.8)$$

formula bilan aniqlaymiz. Ikkinchi shart ning ga bog‘liq emasligiga teng kuchli.$\delta_j^2 u_{j'}(0) j$

Ta’rif 2.2. Agar bo‘lib, tenglikni da va shartni qanoatlantirsa, masalaning kuchli yechimi deyiladi. Bu yerda graf normasi bilan qaraladi.$q \in C([0,T]; D(\mathcal{A})) \cap C^1([0,T]; \mathcal{H}) iq_t = -\mathcal{A}q + f\mathcal{H}q(0) = q_0 qD(\mathcal{A})$

Kuchli yechimning graf uchidagi qiymati va hosilasi aniqlangan bo‘lib, (2.3) - (2.4) shartlar barcha da bajariladi. Xususan, bo‘lgani uchun boshlang‘ich funksiya ham quyidagi moslik shartlarini qanoatlantiradi:$tq_0 \in D(\mathcal{A})$

$$\sum_{j=1}^n q_0^{(j)}(0) = 0, \qquad \delta_1^2 (q_0^{(1)})'(0) = \dots = \delta_n^2 (q_0^{(n)})'(0). \qquad (2.9)$$

Kuchli yechimning har bir komponenti ga tegishli. Bundan da va ning nolga intilishi kelib chiqadi.$H^2(0,\infty) x \to \infty q^{(j)}(x,t) q_x^{(j)}(x,t)$

3 Akslantirish matritsasi va operatorning tuzilishi

3.1 Ortogonal proyektorlar

Quyidagi matritsalarni aniqlaymiz:

$$P_D = \frac{v\mathbf{1}^\top}{V}, \qquad P_N = I_n - P_D, \qquad S = P_N - P_D = I_n - \frac{2v\mathbf{1}^\top}{V}. \qquad (3.1)$$

Bizga Δ-vaznli ko‘paytmaga nisbatan xossalari kerak bo‘ladi.

Lemma 3.1. matritsalar da o‘zaro ortogonal proyektorlar bo‘lib, $P_D, P_N \mathbb{C}_\Delta^n$

$$RanP_D = span\{v\}, \qquad RanP_N = \ker \mathbf{1}^\top. \quad (3.2)$$

Bundan tashqari,

$$S^2 = I_n, \qquad S^*\Delta S = \Delta, \qquad \mathbf{1}^\top S = -\mathbf{1}^\top, \qquad Sv = -v, \quad (3.3)$$

$$(I_n - S)a = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{1}^\top a = 0, \qquad (I_n + S)b = 0 \;\Leftrightarrow\; b \in span\{v\}. \quad (3.4)$$

Isbot. dan kelib chiqadi. bo'lgani uchun $\mathbf{1}^\top v = VP_D^2 = P_D\Delta v = \mathbf{1}$

$$\Delta P_D = \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^\top}{V} = P_D^*\Delta.$$

Demak, vaznli ortogonal proyektordir. ham shunday va. Proyektorlarning obrazlari (3.2) bilan beriladi. dan va hosil bo'ladi. Shu sababli. Qolgan tengliklar (3.1) dan bevosita kelib chiqadi. Xususan,,. $P_DP_N = I_n - P_DP_DP_N = P_NP_D = 0S = P_N - P_DS^2 = P_N + P_D = I_nS^*\Delta = \Delta SS^*\Delta S = \Delta I_n - S = 2P_DI_n + S = 2P_N$

3.2 Dirixle-Neyman ajralishi

$u \in \mathcal{H}$ uchun

$$\psi_u(x) = \frac{\mathbf{1}^\top u(x)}{V}, \qquad u_D = v\psi_u = P_Du, \qquad u_N = P_Nu \quad (3.5)$$

deb olamiz. va ortogonallik tufayli $|v|_\Delta^2 = V$

$$\|u\|_\delta^2 = V\|\psi_u\|_{L^2(0,\infty)}^2 + \|u_N\|_\delta^2. \quad (3.6)$$

Agar bo'lsa, (2.8) aynan $u \in D(\mathcal{A})$

$$\psi_u(0) = 0, \qquad (u_N)'(0) = 0 \quad (3.7)$$

shartlarga teng kuchli. Demak, ulanish shartlari shu ikki proyeksiya bo'yicha Dirixle va Neyman shartlariga ajraladi.

Tasdiq 3.2. operator da o'z-o'ziga qo'shma va manfiy emas. U bitta Dirixle va ta Neyman yarim o'q operatorining ortogonal yig'indisiga unitar ekvivalent: $\mathcal{A}\mathcal{H}n - 1$

$$\mathcal{A} \simeq A_D \oplus \underbrace{A_N \oplus \cdots \oplus A_N}_{n-1}, \qquad A_D = A_N = -\sigma\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}, \quad (3.8)$$

bunda va. $D(A_D) = \{h \in H^2(0,\infty): h(0) = 0\} D(A_N) = \{h \in H^2(0,\infty): h'(0) = 0\}$

Isbot. vektorni fazoning -ortonormal bazisi bilan to'ldiramiz. bo'lsin.. almashtirish ni ta odatdagi fazoning yig'indisiga unitar o'tkazadi. Birinchi koordinata, qolgan koordinatalar esa ning shu bazisdagi komponentalaridir. (3.7) dan va,, kelib chiqadi. o'zgarmas bo'lgani uchun komponentalar bo'yicha kabi ta'sir qiladi. $e_D = v/\sqrt{V}\ker\mathbf{1}^\top\Delta e_2, \dots, e_nQ = (e_D, e_2, \dots, e_n)Q^*\Delta Q = I_nu = Qh\mathcal{H}nL^2(0,\infty)h_1 = \sqrt{V}\psi_u u_N h_1(0) = 0h_{r'}(0) = 0r \geq 2QQ^{-1}\mathcal{A}Q - \sigma\partial_x^2$

Yarim o'qdagi Dirixle va Neyman operatorlari mos ravishda sinus va kosinus almashtirishlari yordamida ga ko'paytirish operatoriga keltiriladi. Shuning uchun ular o'z-o'ziga qo'shma va manfiy emas. To'g'ri yig'indi uchun ham ushbu xossalar saqlanadi. σk^2

Bo'laklab integrallashda hosil bo'ladigan chegaraviy had ham nolga teng. Haqiqatan, bo'lganda, $u'(0) = cv$

$$\sum_j \delta_j^2\overline{u^{(j)}(0)}u_j,(0) = c\,\overline{\sum_j u^{(j)}(0)} = 0.$$

Demak,

$$\langle u, \mathcal{A}u\rangle_\delta = \sigma\sum_{j=1}^n \delta_j^2 \int_0^\infty |u_{j'}(x)|^2\,\mathrm{d}x \geq 0. \quad (3.9)$$

Natija 3.3. Kuchli yechim uchun va funksiyalar $\psi = \mathbf{1}^\top q/Vu = P_Nq$

$$i\psi_t = \sigma\psi_{xx} + \frac{1}{V}\sum_j f^{(j)}, \psi(0,t) = 0, \psi(x,0) = \frac{1}{V}\sum_j q_0^{(j)}(x), \quad (3.10)$$

$$iu_t = \sigma u_{xx} + P_Nf, u_x(0,t) = 0, u(x,0) = P_Nq_0(x) \quad (3.11)$$

masalalarni qanoatlantiradi. bo'lgani uchun Neyman masalasining ta mustaqil komponenti bor. Aksincha, bu ikki masalaning yechimlaridan tuzilgan dastlabki masalaning yechimi bo'ladi. $u(x,t) \in \ker\mathbf{1}^\top n - 1q = v\psi + u$

Isbot. va matritsalar o'zgarmas, shuning uchun ular differensiallash bilan o'rin almashadi. Tenglamaga shu proyektorlarni qo'llab, (3.10) - (3.11) ni olamiz. Chegaraviy shartlar (3.7) dan kelib chiqadi. Teskari tasdiq uchun deb olish yetarli:, va tengliklardan hamda hosil bo'ladi. $P_DP_Nq = v\psi + u\mathbf{1}^\top u = 0\psi(0,t) = 0u_x(0,t) = 0\mathbf{1}^\top q(0,t) = 0q_x(0,t) = v\psi_x(0,t)$

4 Integral yadro va masalaning korrektligi

4.1 Butun haqiqiy o'qqa davom ettirish

$\varphi \in \mathcal{H}$ ni butun haqiqiy o‘qqa

$$(E\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ S\varphi(-x), & x < 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

qoida bilan davom ettiramiz. Butun o‘qda ham Δ-vaznli vektor norma ishlatiladi. (3.3) dan

$$(E\varphi)(-x) = S(E\varphi)(x), \qquad \|E\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^n_\Delta)} = 2\|\varphi\|^2_\delta \quad (4.2)$$

kelib chiqadi. Bu davomning nol nuqtadagi qiymatlari mos kelishi uchun, birinchi hosilalari mos kelishi uchun esa bo‘lishi kerak. (3.4) ga ko‘ra, bu ikki tenglik aynan operatorning ulanish shartlaridir. Shu sababli bo‘lsa, bo‘ladi. Teskari tasdiq ham o‘rinli: ekanidan qiymat va birinchi hosilaning nol nuqtada uzluksizligi, demak, ulanish shartlari kelib chiqadi.$(I_n - S)\varphi(0) = 0 (I_n + S)\varphi'(0) = 0 \varphi \in D(\mathcal{A}) E\varphi \in H^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^n) E\varphi \in H^2(\mathbb{R};\mathbb{C}^n)$

Furye almashtirishi va uning teskarisini

$$\widehat{\Phi}(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}\Phi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ikx}\widehat{\Phi}(k)\,\mathrm{d}k$$

ko‘rinishda olamiz. funksiyalar uchun bu tengliklar Plancherel ma’nosida tushuniladi. Butun o‘qdagi erkin guruhL^2

$$\widehat{U_0(t)}\Phi(k) = e^{i\sigma k^2 t}\widehat{\Phi}(k), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad (4.3)$$

formula bilan aniqlanadi va unitardir. simmetriya ta’sirida saqlanadi. Shuning uchun$\Phi(-x) = S\Phi(x) U_0(t)$

$$U(t)\varphi = U_0(t)E\varphi|_{x>0} \quad (4.4)$$

$\mathcal{H}$ da unitar guruh beradi. Uning generatori, ya’ni.$i\mathcal{A}U(t) = e^{it\mathcal{A}}$

$t > 0$ uchun fundamental yadro

$$G(x,t) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{4\pi\sigma t}} \exp\left(-\frac{ix^2}{4\sigma t}\right) \quad (4.5)$$

bo‘lib, tenglamani qanoatlantiradi. Uni Furye integralida Abel limitiga o‘tish orqali topish mumkin:$iG_t = \sigma G_{xx}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ikx + i\sigma k^2 t - \varepsilon k^2}\,\mathrm{d}k = \frac{\exp\{-x^2/[4(\varepsilon - i\sigma t)]\}}{\sqrt{4\pi(\varepsilon - i\sigma t)}} \to G(x,t), \qquad \varepsilon \downarrow 0. \quad (4.6)$$

Bu yerda kvadrat ildizning sohadan uzluksiz davom ettirilgan tarmog‘i olinadi.$Re(\varepsilon - i\sigma t) > 0$

Grafdagi matritsali yadro

$$K(x,y,t) = G(x-y,t)I_n + G(x+y,t)S, \qquad x,y > 0, \quad (4.7)$$

yoki komponentalarda ko‘rinishida ifodalanadi. bo‘lganda (4.4) dan$K_{j\ell} = I_{j\ell}G(x-y,t) + S_{j\ell}G(x+y,t) \varphi \in \mathcal{H} \cap L^1_\Delta$

$$(U(t)\varphi)(x) = \int_0^\infty K(x,y,t)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \quad (4.8)$$

kelib chiqadi. Umumiy uchun uni funksiyalar bilan yaqinlashtirib, o‘ng tomonni dagi limit sifatida aniqlaymiz. ning unitarligi bu limitning yaqinlashtirish usuliga bog‘liq emasligini ta’minlaydi.$\varphi \in \mathcal{H} L^1 \cap L^2 \mathcal{H} U(t)$

Izoh 4.1 Yadrodagi had qirra bo‘ylab tarqalishni, had esa graf uchidan akslanish va boshqa qirralarga o‘tishni ifodalaydi. juft funksiya bo‘lgani uchun $G(x-y,t)G(x+y,t)SG$

$$\mathbf{1}^\top K(0,y,t) = 0, \qquad \partial_x K(0,y,t) = G_x(y,t)(S - I_n)$$

hosil bo‘ladi. ekanini hisobga olsak, bu tengliklar ikkala ulanish shartini ham beradi. Kuchli yechim uchun ular graf uchidagi izlar ma’nosida bajariladi.$Ran(S - I_n) \subset span\{v\}$

4.2 Mavjudlik, yagonalik va turg‘unlik

Ta’rif 4.2. va uchun$q_0 \in \mathcal{H} f \in L^1(0,T;\mathcal{H})$

$$q(t) = U(t)q_0 - i\int_0^t U(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s \quad (4.9)$$

formula bilan aniqlangan funksiya masalaning umumlashgan (mild) yechimi deyiladi.$q \in C([0,T];\mathcal{H})$

Teorema 4.3. Har qanday va uchun masalaning yagona umumlashgan yechimi mavjud. Agar$q_0 \in \mathcal{H} f \in L^1(0,T;\mathcal{H})$

$$q_0 \in D(\mathcal{A}), \qquad f \in C^1([0,T];\mathcal{H}), \quad (4.10)$$

shartlar ham bajarilsa, bu yechim kuchli yechim bo‘ladi. Barcha uchun$0 \le t \le T$

$$\|q(t)\|_\delta \le \|q_0\|_\delta + \int_0^t \|f(s)\|_\delta\,\mathrm{d}s. \quad (4.11)$$

Yechimning integral tasviri

$$q(x,t) = \int_0^\infty K(x,y,t)q_0(y)\,dy - i\int_0^t \int_0^\infty K(x,y,t-s)f(y,s)\,dy\,ds \qquad (4.12)$$

ko'rinishda yoziladi. Fazoviy integrallar umumiy holda (4.8) dagi kabi ma'noda olinadi. Qo'shimcha va shartlar ostida bu integrallar da absolyut yaqinlashadi.$L^2 q_0 \in L^1_\Delta f \in C([0,T];L^1_\Delta)x > 0, t > 0$

Isbot. 3.2-tasdiqqa ko'ra, kuchli uzluksiz unitar guruhdir. Shuning uchun (4.9) dagi integral mavjud va u ni uzluksiz funksiya sifatida yagona aniqlaydi. (4.11) baho unitarlik va uchburchak tengsizligidan kelib chiqadi. Bu Dyuamel formulasining guruhlar nazariyasidagi ko'rinishidir [7].$U(t)q$

Endi yechimning kuchli ekanini ko'rsatamiz. Buning uchun va $B = i\mathcal{A}$

$$w(t) = \int_0^t U(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s$$

deb belgilaymiz. bo'lganda $f \in C^1([0,T];\mathcal{H})$

$$Bw(t) = U(t)f(0) - f(t) + \int_0^t U(t-s)f'(s)\,\mathrm{d}s \qquad (4.13)$$

tenglik o'rinli bo'lib,. Buni asoslash uchun ning oraliqqa mos spektral proyektorini bilan belgilaymiz. Dastlab o'rniga ni olamiz. Bu qismfazoda chegaralangan, shuning uchun bo'yicha bo'laklab integrallash (4.13) ni beradi. va yaqinlashishlar kompakt vaqt oralig'ida tekis bo'lganidan, ning yopiqligi yordamida limitga o'tamiz. Natijada (4.13) tenglik hamda munosabat hosil bo'ladi. Bundan tashqari,.$w(t) \in D(B)\mathcal{A}[0,m]P_m f P_m f BsP_m f \to fP_m f' \to f'Bw \in C([0,T];D(B))w' = Bw + f$

$q_0 \in D(B)$ uchun. Demak, ham shu sinfda va $U(t)q_0 \in C([0,T];D(B)) \cap C^1([0,T];\mathcal{H})q = U(t)q_0 - iw$

$$q_t = Bq - if = i\mathcal{A}q - if,$$

ya'ni. (3.8) va yarim o'qdagi Sobolev bahosiga ko'ra, ning graf normasi normasi bilan ekvivalent. Demak, kuchli yechim uchun 2.2-ta'rifda berilgan sinfga tegishli. boshlang'ich shart esa formuladan bevosita kelib chiqadi.$iq_t = -\mathcal{A}q + fD(\mathcal{A})H^2(\Gamma)qq(0) = q_0$

Yagonalikni ko'rsatish uchun ixtiyoriy kuchli yechimni olib, ni differensiallaymiz. So'ng vaqt bo'yicha integrallash (4.9) ni beradi. Demak, har qanday kuchli yechim yuqorida qurilgan yechim bilan ustma-ust tushadi.$U(-t)q(t)$

(4.8) ni Dyuamel formulasiga qo'ysak, (4.12) hosil bo'ladi. Teoremadagi qo'shimcha shartlar ostida va tengliklardan $L^1|G(z,\tau)| = (4\pi\sigma\tau)^{-1/2}|Sa|_\Delta = |a|_\Delta$

$$\int_0^t \int_0^\infty |K(x,y,t-s)f(y,s)|_\Delta dyds \le \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}}\int_0^t (t-s)^{-1/2} f(s)_{1,\Delta} ds < \infty$$

kelib chiqadi. Shunday qilib, integrallar absolyut yaqinlashadi va Fubini teoremasini qo'llash mumkin. Boshlang'ich shart da normasida limitga o'tish orqali bajariladi.$t \downarrow 0\mathcal{H}$

Natija 4.4. Ikki yechim uchun

$$\|q(t) - \tilde{q}(t)\|_\delta \le \|q_0 - \tilde{q}_0\|_\delta + \int_0^t \|f(s) - \tilde{f}(s)\|_\delta ds. \qquad (4.14)$$

Bu baho yechimning boshlang'ich funksiya va manbaga uzluksiz bog'liqligini ko'rsatadi. Demak, masala qaralayotgan sinflarda korrekt.

Tasdiq 4.5. Kuchli yechim uchun vaznli massa differensiallanuvchi va$M(t) = \|q(t)\|_\delta^2$

$$M'(t) = 2Im\langle q(t), f(t)\rangle_\delta. \qquad (4.15)$$

Xususan, bo'lganda. Massa saqlanishi barcha umumlashgan yechimlar uchun ham o'rinli.$f = 0M(t) = M(0)$

Isbot. tenglikdan va skalyar ko'paytmaning birinchi argument bo'yicha qo'shma chiziqliligidan foydalanib, quyidagini olamiz: $q_t = i\mathcal{A}q - if$

$$M' = 2Re\langle q, q_t\rangle_\delta = 2Re(i\langle q, \mathcal{A}q\rangle_\delta - i\langle q, f\rangle_\delta) = 2Im\langle q, f\rangle_\delta,$$

chunki haqiqiy son. holida umumlashgan yechimning massasi saqlanishi ning unitarligidan kelib chiqadi.$\langle q, \mathcal{A}q\rangle_\delta f = 0U(t)$

Izoh 4.6. yechimning vaznli normasi kvadratidir. (3.9) dagi kvadratik forma esa uning hosilalari orqali ifodalanadi. va bo'lganda ham saqlanadi. Bu ning bilan o'rin almashishidan kelib chiqadi.$M(t)L^2 f = 0q_0 \in D(\mathcal{A})\left\|\mathcal{A}^{1/2}q(t)\right\|_\delta^2 = \sigma\sum_j \delta_j^2 \left\|q_x^{(j)}(t)\right\|_2^2 \mathcal{A}^{1/2}U(t)$

Natija 4.7. va uchun $\varphi \in \mathcal{H} \cap L^1_\Delta t > 0$

$$\|U(t)\varphi\|_{L^\infty_\Delta} \le \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma t}}\|\varphi\|_{1,\Delta}. \quad (4.16)$$

Isbot. (4.7) dagi ikkala funksiyaning moduli ga teng. vaznli normani saqlagani uchun integralga uchburchak tengsizligini qo'llab, kerakli bahoni olamiz.$G(4\pi\sigma t)^{-1/2}S$

5 Fokas usuli va yechimning kontur tasviri

5.1 Lokal va global munosabatlar

Avval va fazo bo'yicha Shvars sinfiga tegishli, manba esa vaqt bo'yicha yetarlicha silliq bo'lsin. Bu holda yechim va uning hosilalari cheksizlikda tez kamayadi. Formulani umumiy berilganlarga o'tkazish uchun bo'lim oxirida kontur operatorlarini baholaymiz.$Eq_0 Ef(\cdot,t)L^2$

Dispersiya funksiyasi

$$\omega(k) = -i\sigma k^2, \qquad \omega(-k) = \omega(k) \quad (5.1)$$

bo'lsin. (2.1) dan har bir komponent uchun

$$\partial_t(e^{-ikx+\omega t}q^{(j)}) = \partial_x[\sigma e^{-ikx+\omega t}(kq^{(j)} - iq^{(j)}_x)] - ie^{-ikx+\omega t}f^{(j)} \quad (5.2)$$

lokal ayniyat kelib chiqadi. Quyidagilarni aniqlaymiz:

$$\hat{q}(k,t) = \int_0^\infty e^{-ikx}q(x,t)dx,\ \hat{q}_0(k) = \int_0^\infty e^{-ikx}q_0(x)dx, \quad (5.3)$$

$$g_0(\omega,t) = \int_0^t e^{\omega s}q(0,s)ds, \ \ g_1(\omega,t) = \int_0^t e^{\omega s}q_x(0,s)ds, \quad (5.4)$$

$$F(k,t) = \int_0^t e^{\omega(k)s}\hat{f}(k,s)ds. \quad (5.5)$$

e^{-ikx} ko'paytuvchi da uchun chegaralangan. Shu yarim tekislikda (5.2) ni fazo va vaqt bo'yicha integrallab, $x > 0 Imk \le 0$

$$e^{\omega t}\hat{q}(k,t) = \hat{q}_0(k) - \sigma k g_0(\omega,t) + i\sigma g_1(\omega,t) - iF(k,t), \quad Imk \le 0, \quad (5.6)$$

ni olamiz. simmetriya esa$k \mapsto -k$

$$e^{\omega t}\hat{q}(-k,t) = \hat{q}_0(-k) + \sigma k g_0(\omega,t) + i\sigma g_1(\omega,t) - iF(-k,t), \quad Imk \ge 0 \quad (5.7)$$

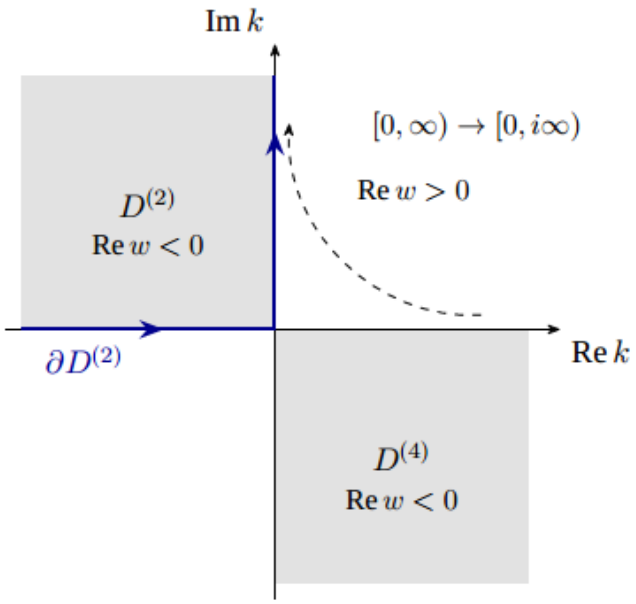
munosabatni olamiz. Demak, akslangan almashtirish yuqori yarim tekislikda aniqlangan.

5.2 Noma'lum chegaraviy qiymatlarni yo'qotish

Kompleks tekislikning II choragi va uning chegarasini

$$D^{(2)} = \{k: Rek < 0,\ Imk > 0\}, \qquad \mathcal{C} = \partial D^{(2)} = (-\infty, 0] \cup [0, i\infty), \quad (5.8)$$

deb belgilaymiz. Kontur bo'ylab yo'nalish ko'rinishda olinadi. bo'lgani uchun da.$-\infty \to 0 \to i\infty \mathrm{Re}\omega(k) = 2\sigma \mathrm{Re}\, k \cdot \mathrm{Im}kD^{(2)} \mathrm{Re}\omega < 0$



2-chizma. Kontur yo'nalishi va nurni nurga siljitish.$[0,\infty)[0,i\infty)$

(5.6) ga teskari Furye almashtirishini qo'llab,

$$q(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ikx-\omega t}[\hat{q}_0(k) - iF(k,t)]dk +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ikx-\omega t}[-\sigma k g_0(\omega,t) + i\sigma g_1(\omega,t)]dk \quad (5.9)$$

ni olamiz. Ikkinchi integralning musbat haqiqiy nur bo‘yicha qismini birinchi chorak orqali musbat mavhum nurga o‘tkazamiz. Bu chorakda va.$Re\omega \geq 0|e^{ikx}| \leq 1$

Kontur o‘tishini asoslash uchun silliq funksiyani olib, vaqt bo‘yicha bo‘laklab integrallaymiz:h

$$e^{-\omega t}\int_0^t e^{\omega s}h(s)ds = \frac{h(t)-e^{-\omega t}h(0)}{\omega} - \frac{1}{\omega}\int_0^t e^{-\omega(t-s)}h'(s)ds$$

Demak, birinchi chorakda katta uchun$|k|$

$$e^{-\omega t}[-\sigma k g_0 + i\sigma g_1] = O(|k|^{-1}).$$

Radiusi bo‘lgan chorak yoydagi integral, uchun, bilan baholanadi. Yoy integrali nolga intilgani uchun ikkinchi integralni bo‘yicha yozish mumkin. da vaqt integrallari analitik.$Rx > 0C\int_0^{\pi/2} e^{-Rx\sin\theta}d\theta = O(R^{-1})\mathcal{C}k = 0$

Endi

$$R(k,t) = e^{\omega t}\hat{q}(-k,t) - \hat{q}_0(-k) + iF(-k,t) \quad (5.10)$$

deb belgilaymiz. (5.7) va ulanish shartlaridan

$$\sigma k g_0 + i\sigma g_1 = R, \qquad \mathbf{1}^{\top} g_0 = 0, \qquad g_1 = v g_* \quad (5.11)$$

kelib chiqadi. Bu yerda. da sistemani yechish uchun birinchi tenglikni chapdan ga ko‘paytiramiz. Natijada hosil bo‘ladi va$g_* = \int_0^t e^{\omega s}c(s)dsk \neq 0\mathbf{1}^{\top}i\sigma V g_* = \mathbf{1}^{\top}R$

$$i\sigma g_1 = P_D R, \qquad \sigma k g_0 = P_N R, \qquad -\sigma k g_0 + i\sigma g_1 = -SR. \quad (5.12)$$

tengliklarni olamiz. da va yagona aniqlanadi. da aniqlanmasa ham, integralga kiradigan oxirgi ifoda silliq berilganlar uchun uzluksiz davom etadi.$k \neq 0 g_0 g_1 k = 0 g_0$

(5.10) ni o‘rniga qo‘ysak, noma’lum yechim qatnashgan had

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}} e^{ikx}S\hat{q}(-k,t)k$$

ko‘rinishga keladi. Silliq va tez kamayuvchi yechimning almashtirishi yuqori yarim tekislikda golomorf bo‘lib, katta da bilan baholanadi. Konturni II chorakdagi yoy bilan yopamiz. ning kamayishi tufayli yoy integrali nolga intiladi, Koshi teoremasiga ko‘ra esa yuqoridagi integral nolga teng bo‘ladi. Shu tariqa formuladan noma’lum yechim yo‘qoladi.$\hat{q}(-k,t)|k|O(|k|^{-1})e^{ikx}$

5.3. Kontur operatorlari uchun tekis baho

Endi silliqlik farazini olib tashlab, kontur formulani fazoda asoslaymiz. Buning uchun avval Laplas operatoriga tegishli bahoni keltiramiz:L^2

$$(\mathcal{L}\varphi)(\kappa) = \int_0^{\infty} e^{-\kappa y}\varphi(y)dy, \qquad \kappa > 0.$$

Lemma 5.1. chegaralangan va. Bundan tashqari,$\mathcal{L}: L^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty)\|\mathcal{L}\| \leq \sqrt{\pi}$

$$|\mathcal{L}\varphi(\kappa)| \leq (2\kappa)^{-1/2}\|\varphi\|_2. \quad (5.13)$$

Isbot. (5.13) Koshi–Shvars tengsizligidan kelib chiqadi. Kompakt tayanchli funksiyalar uchun operatorining yadrosini hisoblasak,$\mathcal{L} * \mathcal{L}$

$$\int_0^{\infty} e^{-\kappa(x+y)}d\kappa = \frac{1}{x+y}$$

hosil bo‘ladi. vaznni olganda$p(x) = x^{-1/2}$

$$\int_0^{\infty} \frac{p(y)}{x+y}dy = \pi p(x)$$

tenglik bajariladi. Shur bahosiga ko‘ra,. Kompakt tayanchli funksiyalar zichligidan foydalanib, bu bahoni barcha funksiyalar uchun olamiz.$\|\mathcal{L} * \mathcal{L}\| \leq \pi L^2$

$R > 0$, va uchun$\tau \geq 0\mathcal{C}_R = [-R,0] \cup [0,iR]$

$$(B_R(\tau)\varphi)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}_R} e^{ikx+i\sigma k^2\tau}\hat{\varphi}(-k)dk \quad (5.14)$$

deb belgilaymiz. Haqiqiy nurda ni nol bilan davom ettirilgan funksiyaning Furye almashtirishi sifatida olamiz. Mavhum nurdagi qiymat esa Laplas integrali orqali aniqlanadi.$\widehat{\varphi}L^2$

Lemma 5.2. Barcha, uchun$R > 0\tau \geq 0$

$$\|B_R(\tau)\varphi\|_{L^2(0,\infty)} \leq \frac{3}{2}\|\varphi\|_2.$$(5.15)

Har bir va uchun$\tau > 0\varphi \in L^2(0,\infty)$

$$B_R(\tau)\varphi \to U_0(\tau)\varphi_-\big|_{x>0} \quad L^2(0,\infty)\ da, \qquad R \to \infty, \qquad (5.16)$$

bunda,, va,. Agar bo'lsa, limit bilan beriladi.$\varphi_-(x) = \varphi(-x)x < 0\varphi_-(x) = 0x > 0\varphi \in L^1 \cap L^2 \int_0^\infty G(x+y,\tau)\varphi(y)dy$

Isbot. Avval (5.14) integralning bo'yicha qismini baholaymiz. U butun o'qdagi Furye multiplikatorini qo'llab, natijani ga cheklashdan hosil bo'ladi. Multiplikatorning moduli birdan oshmaydi. bo'lgani uchun bu qismning normasi ko'pi bilan ga teng.$[-R,0]x > 0\|\varphi_-\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\varphi\|_2\|\varphi\|_2$

Mavhum nurda, va$k = i\kappa \mathrm{d}k = i\mathrm{d}\kappa$

$$\frac{i}{2\pi}\int_0^R e^{-\kappa x - i\sigma\kappa^2\tau}(\mathcal{L}\varphi)(\kappa)d\kappa = \frac{i}{2\pi}\mathcal{L} * M_{R,\tau}\mathcal{L}\varphi,$$

bunda funksiyani ga ko'paytirish operatoridir. Uning normasi birdan oshmaydi. 5.1-lemmaga ko'ra, mavhum nur bo'yicha qismning normasi dan katta emas. Ikki bahoni qo'shib, (5.15) ni olamiz. Bu bahodagi o'zgarmas va ga bog'liq emas.$M_{R,\tau}\mathbf{1}_{[0,R]}(\kappa)e^{-i\sigma\kappa^2\tau}\frac{1}{2}\|\varphi\|_2 R\tau$

Limitni dastlab uchun topamiz. Yuqori yarim tekislikda ikki marta bo'laklab integrallashdan kelib chiqadi. Birinchi chorakda ekanini hisobga olib, yoyida Minkovskiy tengsizligini qo'llaymiz:$\varphi \in C_c^\infty(0,\infty)|\hat{\varphi}(-k)| \leq C|k|^{-2}|e^{i\sigma k^2\tau}| \leq 1k = Re^{i\theta}$

$$\left\|\int_{\text{yoy}} e^{ikx+i\sigma k^2\tau}\widehat{\varphi}(-k)dk\right\|_{L^2_x(0,\infty)} \leq \frac{C}{R}\int_0^{\pi/2}(2R\sin\theta)^{-1/2}d\theta \leq C_\varphi R^{-3/2} \to 0$$

Koshi teoremasiga ko'ra, va bo'yicha integrallarning farqi shu yoy integraliga teng. Ikkinchi integral esa Plancherel teoremasi bo'yicha ga yaqinlashadi. Demak, limit haqidagi tasdiq silliq kompakt tayanchli funksiyalar uchun isbotlandi.$\mathcal{C}_R[-R,R]U_0(\tau)\varphi_-$

$C_c^\infty(0,\infty)$ fazo da zich. Shuning uchun (5.15) baho va limit operatori normasining birdan oshmasligidan foydalanib, (5.16) ni ixtiyoriy funksiya uchun olamiz. holida limitning yadro orqali ifodasi butun o'qdagi konvolyutsiya formulasidan kelib chiqadi.$L^2L^2L^1 \cap L^2$

5.4 Yechimning kontur formulasi

Teorema 5.3., bo'lsin. 4.3-teoremadagi yechim har bir uchun$q_0 \in \mathcal{H}f \in L^1(0,T;\mathcal{H})t > 0$

$$q(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ikx-\omega(k)t}[\hat{q}_0(k) - iF(k,t)]dk +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}} e^{ikx-\omega(k)t}S[\hat{q}_0(-k) - iF(-k,t)]dk \qquad (5.17)$$

formula bilan ifodalanadi. Haqiqiy o'q bo'yicha integral simmetrik spektral kesishlarning, kontur integrali esa bo'yicha integrallarning dagi limiti sifatida olinadi. Mavhum nur bo'yicha integral har bir da absolyut yaqinlashadi. Bu formula (4.12) dagi integral yechimga teng.$\mathcal{C}_R\mathcal{H}x > 0$

Isbot. ni manfiy yarim o'qqa nol bilan davom ettiramiz. Plancherel teoremasiga ko'ra, birinchi satrdagi boshlang'ich had ning shu funksiyaga ta'sirini beradi. 5.2-lemma esa ikkinchi satrdagi boshlang'ich hadni akslangan davom bilan bog'laydi. o'zgarmas matritsa bo'lgani uchun uni integral tashqarisiga chiqarish mumkin. Natijada ikkala hadning yig'indisi (4.4) ga, ya'ni ga teng bo'ladi.$q_0U_0(t)SU(t)q_0$

Manba qatnashgan hadni qaraymiz. Ta'rifga ko'ra,

$$e^{-\omega(k)t}F(k,t) = \int_0^t e^{-\omega(k)(t-s)}\hat{f}(k,s)ds.$$

Spektral oraliq chekli bo'lganda integrallash tartibini almashtirish mumkin. To'g'ri tarqalishga mos operatorning normasi birdan oshmaydi. Akslangan hadni esa (5.15) va ning vaznli normani saqlash xossasi yordamida baholaymiz: S

$$\|SB_R(t-s)f(s)\|_\delta \leq \frac{3}{2}\|f(s)\|_\delta$$

O‘ng tomon da integrallanuvchi bo‘lib, bahoning o‘zgarmasi ga bog‘liq emas. (5.16) har bir uchun o‘rinli. Shu sababli Bochner integrali uchun dominant yaqinlashish teoremasini qo‘llab, limitini vaqt integrali ostiga kiritamiz. Natijada manba hadi ko‘rinishni oladi.$s \in (0,t)R, t-ss < tR \to \infty - i\int_0^t U(t-s)f(s)ds$

Mavhum nurdagi yaqinlashishni tekshirish uchun deb olib, (5.13) ni qo‘llaymiz. Integral ostidagi vektor normasi biror uchun$k = i\kappa C > 0$

$$Ce^{-\kappa x}\kappa^{-1/2}\left(\|q_0\|_\delta + \int_0^t \|f(s)\|_\delta ds\right)$$

bilan baholanadi. uchun $x > 0$

$$\int_0^\infty e^{-\kappa x}\kappa^{-1/2}d\kappa = \sqrt{\frac{\pi}{x}} < \infty.$$

Demak, mavhum nurdagi integral absolyut yaqinlashadi. Umumiy holda formula dagi tenglik sifatida tushuniladi. Qo‘shimcha shartlar bajarilganda esa (4.12) orqali yechimning nuqtaviy qiymatlarini ham olish mumkin. $\mathcal{H}L^1$

6 Uch qirrali graf: aniq yechim va sonli tekshiruv

6.1 Boshlang‘ich funksiya va aniq yechim

Quyidagi parametrlarni olamiz:

$$n = 3, \qquad \delta = \left(1,2,\frac{1}{2}\right), \quad v = \left(1,\frac{1}{4},4\right)^\top, \; V = \frac{21}{4}, \quad a = (1,-1,0)^\top. \tag{6.1}$$

(3.1) bo‘yicha

$$S = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 13 & -8 & -8 \\ -2 & 19 & -2 \\ -32 & -32 & -11 \end{pmatrix}, \qquad \Delta = \left(1,4,\frac{1}{4}\right). \tag{6.2}$$

Bevosita hisoblash va tengliklarni beradi. Ayrim elementlarning moduli birdan katta bo‘lsa ham, matritsa -vaznli normani saqlaydi.$S^2 = I_3 S^\top \Delta S = \Delta S_{j\ell}\Delta$

$f = 0$ va

$$q_0(x) = ae^{-x^2} + vxe^{-x^2} \tag{6.3}$$

bo‘lsin. va tufayli$\mathbf{1}^\top a = 0\delta_j^2 v_j = 1$

$$\mathbf{1}^\top q_0(0) = 0, \qquad \delta_j^2 (q_0^{(j)})'(0) = 1 \quad (j = 1,2,3).$$

Demak,. Bu misolda Neyman shartini qanoatlantiruvchi va Dirixle shartini qanoatlantiruvchi qismlar birgalikda qatnashadi.$q_0 \in D(A) \cap L_\Delta^1 ae^{-x^2} vxe^{-x^2}$

Tasdiq 6.1. (6.3) boshlang‘ich shartga mos yechim

$$q(x,t) = \left[\frac{a}{z(t)^{1/2}} + \frac{vx}{z(t)^{3/2}}\right]\exp\left(-\frac{x^2}{z(t)}\right), \qquad z(t) = 1 - 4i\sigma t \tag{6.4}$$

formula bilan beriladi. Kompleks darajalar uchun da qiymati birga teng bo‘lgan uzluksiz tarmoq tanlanadi.$t = 0$

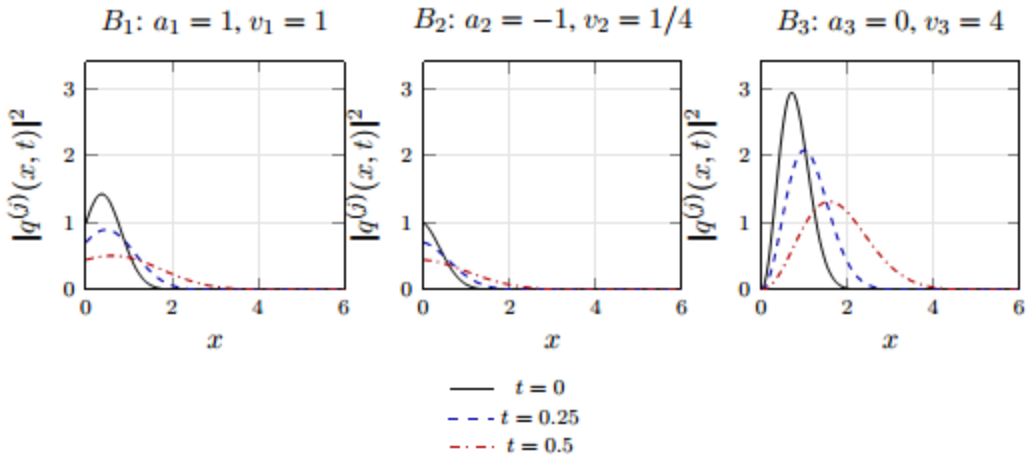
Isbot. funksiyani differensiallab, tenglikni olamiz. juft funksiya bo‘lgani uchun. Uning hosilasi orqali aniqlangan ham shu tenglamaning yechimi bo‘lib, shartni bajaradi. Shuning uchun tenglamani qanoatlantiradi. Graf uchida va tengliklar o‘rinli. da esa (6.3) ni olamiz. 4.3-teoremaga ko‘ra, bu yechim yagona.$H(x,t) = z(t)^{-1/2}e^{-x^2/z(t)} iH_t = \sigma H_{xx} HH_x(0,t) = 0J = -\frac{1}{2}H_x = xz(t)^{-3/2}e^{-x^2/z(t)} J(0,t) = 0q = aH + vJ\mathbf{1}^\top q(0,t) = z(t)^{-1/2}\mathbf{1}^\top a = 0\delta_j^2 q_x^{(j)}(0,t) = z(t)^{-3/2}t = 0$

$a^\top \Delta v = \mathbf{1}^\top a = 0$ bo‘lgani uchun massani hisoblashda aralash had yo‘qoladi. Natijada

$$M(0) = (a^\top \Delta a)\int_0^\infty e^{-2x^2}dx + (v^\top \Delta v)\int_0^\infty x^2 e^{-2x^2}dx =$$

$$= 5\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} + \frac{21}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}} = \frac{101\sqrt{\pi}}{32\sqrt{2}} \approx 3.9557727459020473. \tag{6.5}$$

Massa saqlanishi haqidagi tasdiqqa ko‘ra, bu qiymat barcha da o‘zgarmaydi.t



3-chizma.

bo‘lganda qirralardagi zichliklar. Grafiklar (6.4) aniq formula asosida qurilgan.$\sigma = 1|q^{(j)}(x,t)|^2$

6.2 Sonli hisoblash natijalari

Integral formulani tekshirish uchun deb oldik. (4.12) dagi ga mos integral oraliqda Simpsonning tarkibli formulasi bilan hisoblandi. Oraliq ta teng qismga bo‘lindi, bunda juft son va. Hisoblash natijalari$\sigma = 1f = 00 \le y \le 8NNh = 8/N$

$$x_m = \frac{6m}{240}, \quad m = 0, \ldots, 240, \qquad t \in \{0.1, 0.25, 0.5\}$$

nuqtalarda aniq yechim bilan taqqoslandi. Boshlang‘ich funksiya Gauss funksiyasi kabi tez kamayadi. Shu sababli tanlangan vaqtlarda oraliqning integralga tasiri dan kichik bo‘ladi.$y > 810^{-26}$

Taqribiy yechimni bilan belgilab, xatolik va ulanish shartlarini tekshirish uchun quyidagi miqdorlarni hisobladik:q_N

$$E_\infty(N) = \max_{m,t,j} |q_N^{(j)}(x_m,t) - q^{(j)}(x_m,t)|, \qquad (6.6)$$

$$r_0(N) = \max_t \left|\Sigma_j\, q_N^{(j)}(0,t)\right|,$$

$$r_1(N) = \max_{t,j} \left|\delta_j^2 \partial_x q_N^{(j)}(0,t) - \delta_1^2 \partial_x q_N^{(1)}(0,t)\right|.$$

Hosilani hisoblash uchun avval yadroni differensiallaymiz:. So‘ng hosila qatnashgan integralga ham xuddi shu kvadratura qo‘llandi.$G_x(z,t) = -izG(z,t)/(2\sigma t)$

Jadval 1. Integral yechimning aniq formula bilan taqqoslanishi.

N	h	$E_\infty(N)$	$r_0(N)$	$r_1(N)$
32	0.25	1.7684	$1.8 \cdot 10^{-16}$	$4.58 \cdot 10^{-16}$
64	0.125	$5.5092 \cdot 10^{-1}$	$1.31 \cdot 10^{-16}$	$2.48 \cdot 10^{-16}$
128	0.0625	$3.42 \cdot 10^{-6}$	$1.91 \cdot 10^{-16}$	$4 \cdot 10^{-16}$
256	0.03125	$1.9159 \cdot 10^{-15}$	$9.97 \cdot 10^{-17}$	$3.55 \cdot 10^{-16}$

1-jadvaldan ko‘rinadiki, dastlabki ikki to‘rda xatolik ancha katta. Bunga Shredinger yadrosining tez tebranishi sabab bo‘ladi. Qadam kichraytirilganda bu tebranishlar yaxshiroq hisobga olinadi va qaralayotgan Gauss misolida xatolik mashina aniqligi darajasigacha kamayadi. Jadvaldagi kamayish tezligi shu misolga tegishli, umumiy boshlang‘ich funksiyalar uchun alohida xatolik bahosi kerak bo‘ladi.

Jadvalda va barcha to‘rlarda juda kichik. Buning sababi ulanish shartlarining yadrodagi matritsa orqali har bir qadamda bajarilishidir. Demak, bu ikki miqdorning kichikligi yechim xatoligi ham kichikligini bildirmaydi. Taqribiy yechimning aniqligini orqali baholaymiz.$r_0 r_1 SE_\infty$

Massani hisoblashda oraliq 1200 ta teng qismga bo‘linib, Simpson formulasi qo‘llandi. da bilan hisoblangan, da esa boshlang‘ich funksiya olindi. Natijalar 2-jadvalda berilgan. Tanlangan vaqtlarda oraliqda qolgan massa dan kichik.$x \in [0,12]t > 0N = 256q_N t = 0x > 1210^{-22}$

Jadval 2. Vaznli massaning (6.5) bilan taqqoslanishi.

t	$M_N(t)$	$\lvert M_N(t) - M(0)\rvert / M(0)$
0	3.9557727459020477	$1.12 \cdot 10^{-16}$
0.1	3.9557727459020464	$2.25 \cdot 10^{-16}$

0.25	3.9557727459020470	$1.12 \cdot 10^{-16}$
0.5	3.9557727459020477	$1.12 \cdot 10^{-16}$

Hisoblashlar ikki karra aniqlikdagi suzuvchi nuqtali arifmetikada bajarildi. Eng kichik xatoliklar yaxlitlash darajasiga yaqin bo‘lgani uchun ularning oxirgi raqamlari dasturiy muhitga qarab farq qilishi mumkin.

6.3. Manba qatnashgan masala uchun misol

q_h bilan (6.4) dagi bir jinsli yechimni belgilaymiz. U holda

$$q(x,t) = e^t q_h(x,t), \qquad f(x,t) = ie^t q_h(x,t) \qquad (6.7)$$

funksiyalar bir jinsli bo‘lmagan masalani qanoatlantiradi. Haqiqatan,. Shu natijani Dyuamel formulasidan ham olish mumkin:$i\partial_t(e^t q_h) = \sigma\partial_x^2(e^t q_h) + ie^t q_h$

$$-i\int_0^t U(t-s)f(s)ds = \int_0^t e^s U(t-s)U(s)q_0 ds = (e^t - 1)U(t)q_0.$$

Boshlang‘ich hadga bu ifodani qo‘shsak, hosil bo‘ladi. Bu misolda massa qonun bo‘yicha o‘sadi va (4.15) tenglikni qanoatlantiradi.$e^t q_h M(t) = e^{2t}M(0)$

Xulosa

Vaznli -ulanish shartlari masalani bitta Dirixle va ta Neyman komponentiga ajratdi. Bu ajralish operatorning o‘z-o‘ziga qo‘shmaligini hamda yechimning mavjudligi va yagonaligini isbotlashga imkon berdi. Akslantirish matritsasi orqali yechimning boshlang‘ich funksiya va manbaga bog‘liq integral formulasi topildi.$\delta' n - 1$

Fokas usulidagi kontur tasvirining shu formulaga tengligi fazoda asoslandi. Kontur operatori uchun olingan tekis baho manba hadida limitni vaqt integrali ostiga kiritishda ishlatildi. Uch qirrali grafdagi aniq yechim bilan taqqoslash integral formulani va massa saqlanishini sonli tekshirish imkonini berdi.$L^2\frac{3}{2}$

Natijalar va barcha qirralarda bir xil uchun olindi. Noldan farqli ulanish parametri yoki turlicha dispersiya koeffitsiyentlari bo‘lgan hol alohida tahlilni talab qiladi.$\beta = 0\sigma$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Berkolaiko G., Kuchment P. Introduction to Quantum Graphs. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 186. Providence, RI: American Mathematical Society, 2013. https://doi.org/10.1090/surv/186doi:10.1090/surv/186.

2. Kostrykin V., Schrader R. Kirchhoff’s rule for quantum wires. Journal of Physics A: Mathematical and General. 1999. Vol. 32, № 4. P. 595–630. https://doi.org/10.1088/0305-4470/32/4/006doi:10.1088/0305-4470/32/4/006.

3. Kurasov P., Rohleder J. Laplacians on bipartite metric graphs. Operators and Matrices. 2020. Vol. 14, № 3. P. 535–553.

4. Fokas A. S. A Unified Approach to Boundary Value Problems. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 78. Philadelphia: SIAM, 2008. https://doi.org/10.1137/1.9780898717068doi:10.1137/1.9780898717068.

5. Sheils N. E., Smith D. A. Heat equation on a network using the Fokas method. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2015. Vol. 48, no. 33. Article 335001.

6. Khudayberganov G., Sobirov Z. A., Eshimbetov M. R. Unified Transform method for the SchrГ¶dinger Equation on a Simple Metric Graph. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2019. Vol. 12, № 4. P. 412–420.

7. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Applied Mathematical Sciences, vol. 44. New York: Springer, 1983. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1doi:10.1007/978-1-4612-5561-1.

8. Sobirov Z.A., Akhmedov M.I., Uecker H. Cauchy problem for the linearized KdV equation on general metric star graphs. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. Vol. 6(1), p. 198-204. (2015).

9. Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. The Fokas’ unified transformation method for Airy equation on simple open star graph. Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. – 2020. Vol. 3. № 4. – p. 438 – 447.

10. Akhmedov M.I., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. Initial-boundary value problem for the linearized KdV equation on simple metric star graph. Uzbek Mathematical Journal. 4. p. 13-20. (2017).

11. Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. The Fokas’ unified transformation method for heat equation on general star graph. Uzbek Mathematical Journal. 1. p. 73-81. (2019).

12. Volkova A.S. The generelized solution of the boundary value problems for heat equation on graphs. Vestnik Sankt-Piterbukgskogo Universiteta. Series 10, Vol. 3. p. 39-47. (2013). (in Russian).

13. Собиров З.А., Эшимбетов М.Р. Метод Фокаса для уравнения теплопроводности на метрических графах. Современная математика. Фундаментальные направления. - 2021. - Т. 67. - №4. - С. 766-782.

14. Deconinck B., Sheils N.E., Smith D.A. The Linear KdV equation with an Interface. Commun. Math. Phys. Vol. 347. p. 489–509 (2016).

15. Fokas A.S., Pelloni B. Unified Transform for Boundary Value Problems. Applications and Advances. SIAM., USA. p. 293. (2015).

16. Fokas A.S. A new transform method for evolution partial differential equations. IMA Journal of Applied Mathematics Vol. 67(6). p. 559–590. (2002).