NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI, [2026-10]
ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427

01.00.00-FIZIKA-MATEMATIKA
journal.namdu.uz
PHYSICS AND MATHEMATICS

УДК 517.956.6

О НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ОТКЛОНЕНИЕМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНЫМ ОПЕРАТОРОМ В СМЫСЛЕ ГЕРАСИМОВА–КАПУТО

Ахмадов Илхом Али угли
Старший преподаватель Навоийского государственного университета
ORCID: 0000-0002-5797-7424
E-mail: ahmadov.ilhom@mail.ru

Аннотация: *В работе изучается нелокальная краевая задача с отклонением от характеристики для уравнения смешанного типа с дробным дифференциальным оператором в смысле Герасимова–Капуто. Исследуются условия существования и единственности решения поставленной задачи в классическом и сильном смыслах. Для доказательства теорем о разрешимости используются свойства функции Грина и функции Райта, а также методы теории интегральных уравнений. Установлено существование единственного классического решения задачи при соответствующих условиях. Кроме того, доказана сильная разрешимость задачи и получена априорная оценка сильного решения в соответствующем функциональном пространстве. Полученные результаты обосновывают разрешимость рассматриваемой нелокальной краевой задачи и расширяют теоретические методы исследования уравнений смешанного типа с дробными дифференциальными операторами.*

Ключевые слова: *уравнение смешанного типа, оператор дробного порядка Герасимова–Капуто, нелокальная краевая задача, отклонение от характеристики, функция Грина, функция Райта, классическое решение, сильное решение, априорная оценка.*

ГЕРАСИМОВ–КАПУТО МАЪНОСИДАГИ КАСР ТАРТИБЛИ ОПЕРАТОРЛИ АРАЛАШ ТИПДАГИ ТЕНГЛАМА УЧУН ХАРАКТЕРИСТИКАДАН ЧЕТЛАНИШЛИ НОЛОКАЛ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА ҲАҚИДА

Annotatsiya: *Ушбу ишда Герасимов–Капуто маъносидаги каср тартибли дифференциал оператор қатнашган аралаш типдаги тенглама учун характеристикадан четланишли нолокал чегаравий масала ўрганилади. Қўйилган масала ечимининг классик ва кучли маъноларда мавжудлиги ҳамда ягоналиги шартлари тадқиқ этилади. Масаланинг ечилувчанлигига оид теоремаларни исботлашда Грин функцияси ва Райт функциясининг хоссаларидан, шунингдек, интеграл тенгламалар назарияси усулларидан фойдаланилади. Тегишли шартлар бажарилганда масаланинг ягона классик ечими мавжудлиги аниқланади. Бундан ташқари, масаланинг кучли маънода ечилувчанлиги исботланади ҳамда тегишли функционал фазода кучли ечим учун априор баҳо олинади. Олинган натижалар қаралаётган нолокал чегаравий масаланинг ечилувчанлигини асослайди ва каср тартибли дифференциал операторлар қатнашган аралаш типдаги тенгламаларни тадқиқ этишнинг назарий усулларини ривожлантиради.*

Kalit so‘zlar: *аралаш типдаги тенглама, Герасимов–Капуто маъносидаги каср тартибли оператор, нолокал чегаравий масала, характеристикадан четланиш, Грин функцияси, Райт функцияси, классик ечим, кучли ечим, априор баҳо.*

ON A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH DEVIATION FROM THE CHARACTERISTIC FOR A MIXED-TYPE EQUATION WITH A FRACTIONAL-ORDER OPERATOR IN THE SENSE OF GERASIMOV–CAPUTO

Abstract: *This paper investigates a nonlocal boundary value problem with deviation from the characteristic for a mixed-type equation involving a fractional-order differential operator in the sense of Gerasimov–Caputo. The existence and uniqueness of solutions to the problem in both the classical and strong senses are studied. The proofs of the solvability theorems rely on the properties of the Green function and the Wright function, as well as methods from the theory of integral equations. The existence of a unique classical solution is established under appropriate conditions. Furthermore, the strong solvability of the problem is proved, and an a priori estimate for the strong solution is obtained in the corresponding functional space. The results provide a rigorous justification of the solvability of the nonlocal boundary value problem under consideration and contribute to the development of theoretical methods for studying mixed-type equations with fractional-order differential operators.*

Keywords: *mixed-type equation, fractional-order Gerasimov–Caputo operator, nonlocal boundary value problem, deviation from the characteristic, Green's function, Wright function, classical solution, strong solution, a priori estimate.*

1.Введение

В последние десятилетия теория дифференциальных уравнений дробного порядка получила значительное развитие. Особый интерес представляют дифференциальные уравнения, содержащие производные дробного порядка, поскольку они позволяют описывать процессы и явления, для математического моделирования которых недостаточно классического аппарата дифференциального исчисления. Применение дробных дифференциальных операторов охватывает различные области науки, включая физику, механику, химию и инженерные дисциплины. В связи с этим исследование краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка представляет собой актуальное направление современной теории дифференциальных уравнений.

Фундаментальные результаты в области дробного интегрального и дифференциального исчисления, а также вопросы разрешимости соответствующих краевых задач изложены в работах Т. Д. Джураева [1], А. М. Нахушева [2], А. В. Псху [3], С. Г. Самко, А. А. Килбаса и О. И. Маричева [4], С. Г. Михлина [5], А. С. Бердышева [6] и других исследователей.

Важное место в теории краевых задач для уравнений смешанного типа занимают задачи, поставленные в областях с отклонением от характеристики. В работе М. А. Садыбекова [7] исследованы свойства краевой задачи для уравнения смешанного типа второго порядка в области с отклонением от характеристики. В частности, доказана сильная разрешимость задачи и установлено вольтерровское свойство соответствующего оператора, то есть отсутствие у него собственных значений.

В работах [8–11] исследованы краевые задачи для уравнений смешанного типа с дробным дифференциальным оператором в смысле Капуто в смешанной области, состоящей из характеристических участков треугольной области и прямоугольника. Полученные результаты составляют теоретическую основу для дальнейшего изучения краевых задач для уравнений смешанного типа с дробными дифференциальными операторами.

Несмотря на имеющиеся результаты, исследование нелокальных краевых задач с отклонением от характеристики для уравнений смешанного типа с дробным дифференциальным оператором в смысле Герасимова–Капуто требует дальнейшего развития. В частности, представляют интерес вопросы существования и единственности классического решения, а также сильной разрешимости соответствующей задачи в надлежащих функциональных пространствах.

Целью настоящей работы является исследование нелокальной краевой задачи с отклонением от характеристики для уравнения смешанного типа с дробным дифференциальным оператором в смысле Герасимова–Капуто. Для достижения поставленной цели используются свойства функции Грина и функции Райта, а также методы теории интегральных уравнений. Устанавливаются условия существования и единственности классического решения задачи, доказывается её сильная разрешимость и получается априорная оценка сильного решения в соответствующем функциональном пространстве.

2.Постановка задачи

Пусть $\Omega \in R^2$ - конечная область, ограниченная при $y>0$ отрезками $AA_0,\ A_0B_0,\ B_0B$ прямых $x=0,\ y=1,\ x=1$ соответсвенно, а при $y<0$ моно-тонной гладкой кривой $AC: y=-\gamma(x),\ 0\le x\le l,$ $0.5\le l\le 1,\ \gamma(0)=0,\quad l+\gamma(l)=1,$ расположенной внутри характеристического треугольника $ABD: 0\le x+y\le x-y<1$ $BC: x-y=1,\ l\le x\le 1$ уравнения характеристикой

$$Lu(x,y)=\left\{\begin{array}{ll} {}_cD^{\alpha}_{0x}u(x,y)-u_{yy}(x,y), & y\ge 0 \\ u_{xx}(x,y)-u_{yy}(x,y), & y<0 \end{array}\right\}=f(x;y), \tag{1}$$

де $${}_cD^{\alpha}_{0x}g=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x (x-z)^{-\alpha}\,g'(z)dz,\quad 0<\operatorname{Re}\alpha<1,\quad x>0$$ - интегральный оператор дробного порядка α в смысле Герасимова-Капуто [3].

Введем обозначения:

$$J=\{(x,y):\ 0<x<1,\ y=0\},\ \Omega_0=\Omega\cap\{y>0\},\quad \Omega_1=\Omega\cap\{y<0\}.$$

Задача M_1. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$u\big|_{AA_0}=0,\ u_y\big|_{A_0B_0}=0,\tag{2}$$

$$[u_x+u_y](\theta_0(t))=u(\theta_1(t)),\tag{3}$$

и на линии измененного типа удовлетворяет условию сопряжения:

$$\lim_{y\to+0}u(x,y)=\lim_{y\to-0}u(x,y),\quad (x,0)\in\bar{I},\quad \lim_{y\to+0}u_y(x,y)=\lim_{y\to-0}u_y(x,y),\quad (x,0)\in I,\tag{4}$$

где $\theta_0(t)$ точка пересечения кривой γ с характеристик $x-y=t\ (0\le t\le 1)$, $\theta(t)$ точка пересечения A_0B_0 с прямие $x=t\ (0\le t\le 1).$

Через $W_2^l(\Omega)=H^l(\Omega)$ обозначим пространство С.Л. Соболева со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_l$ и нормой $\|\cdot\|_l$, $H^0(\Omega)\equiv L_2(\Omega)-$ пространство квадратично суммируемых функций.

Определение 1. Классическим решением задачи M_1 назовем функцию из класса, $\mathrm{P}_1=\{u(x,y):\ u(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})\cap C_y^2(\Omega_0)\cap C_{x,y}^{2,2}(\Omega_1),\ {}_cD_{0x}^{\alpha}z(x,y)\in C(\Omega_0)\}$, удовлетворяющую краевым условиям (2), (3) и (4) задачи M_1 и обращающую уравнение (1) в тождество.

3. Существования и единственность решения задачи M_1

Теорема 1. Если выполнены условия $\gamma(x)\in C^1[0,1],\ \gamma'(x)>-1$ и $f(x,y)\in C^1(\bar{\Omega}),\quad f(0,y)=0,$ то в области Ω существует единственное классическое решение задачи M_1.

Доказательство теоремы. Используя методы работ [3], [11] решение задачи с условиями (2) и $z(x,0)=\tau(x),\ (x,0)\in\bar{J}$ для уравнения (1) в области Ω_0 представим в виде

$$u(x,y)=\int_0^x G_{y_1}(x,y;x_1,0)\tau(x_1)dx_1+\int_0^x dx_1\int_0^1 f(x_1,y_1)G(x,y;x_1,y_1)dy_1,\tag{5}$$

где $G(x,y;x_1,y_1)$ - функция Грина смешанной краевой задачи для диффузионного уравнения (1) в области Ω_0 имеет вид

$$G(x,y;x_1,y_1)=\frac{(x-x_1)^{\beta-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\left[e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{|y-y_1+2n|}{(x-x_1)^{\beta}}\right)-e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{|y+y_1+2n|}{(x-x_1)^{\beta}}\right)\right],\tag{6}$$

$\beta=\alpha/2$, а $e_{\sigma,\varepsilon}^{\mu,\delta}(z)$ - функция типа Райта, которая имеет вид

$$e_{\sigma,\varepsilon}^{\mu,\delta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\sigma n+\mu)\Gamma(\delta-\varepsilon n)},\ \sigma>\varepsilon,\quad \sigma>0.\tag{7}$$

Для дальнейшего доказательства теоремы воспользуемся следующим свойством функции Райта, которое сформулируем в виде леммы.

Лемма. Пусть $a > \dfrac{\delta - 1}{1-\beta}, \quad \delta > -\beta, \ 0 < \beta < 1/2,$ тогда для функции

$$N(t) = t^a e_{1,\beta}^{1,\delta}(-t), \ \ t \in (0, +\infty)$$

справедлива оценка

$$\left|N(t)\right| \le C_2, \quad C_2 = const > 0.$$

Доказательство данной леммы приведено в работе [10].

Продолжим доказательство теоремы. Дифференцируя (5) по y и устремляя y к 0, получим:

$$\nu(x) = \lim_{y \to +0} u_y(x,y) = \lim_{y \to +0} \left[\int_0^x G_{y_1 y}(x,y;x_1,0)\tau(x_1)dx_1 + \int_0^x dx_1 \int_0^1 f(x_1,y_1) G_y(x,y;x_1,y_1)dy_1 \right]. \tag{8}$$

Теперь найдем функции $G_y(x,y;x_1,y_1)$ и $G_{y_1 y}(x,y;x_1,0)$. В силу формулы [3]:

$$\frac{d}{dz} e_{\nu,\varepsilon}^{\mu,\delta}(z) = -\frac{1}{\varepsilon z}\left[e_{\alpha,\varepsilon}^{\mu,\delta-1}(z) + (1-\delta) e_{\alpha,\varepsilon}^{\mu,\delta}(z) \right], \tag{9}$$

имеем

$$G_{y_1}(x,y;x_1,y_1) = -\frac{1}{2\beta(x-x_1)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{sign(y-y_1+2n)(x-x_1)^\beta}{\left|y-y_1+2n\right|} \left[e_{1,\beta}^{1,\beta-1}(z) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (1-\beta) e_{1,\beta}^{1,\beta}(z) \right] + \frac{sign(y+y_1+2n)(x-x_1)^\beta}{\left|y+y_1+2n\right|} \cdot \left[e_{1,\beta}^{1,\beta-1}(\overline{z}) + (1-\beta) e_{1,\beta}^{1,\beta}(\overline{z}) \right] \right], \tag{10}$$

где $z = -\dfrac{\left|y-y_1+2n\right|}{(x-x_1)^\beta}, \quad \overline{z} = -\dfrac{\left|y+y_1+2n\right|}{(x-x_1)^\beta},$

$$\frac{dz}{dy_1} = \frac{sign(y-y_1+2n)}{(x-x_1)^\beta}, \quad \frac{d\overline{z}}{dy_1} = -\frac{sign(y+y_1+2n)}{(x-x_1)^\beta}.$$

Положив в (12) $y_1 = 0,$ а затем применив формулы [3]:

$$e_{1,\varepsilon}^{1,\delta-1}(\theta) + (1-\delta) e_{1,\varepsilon}^{1,\delta}(\theta) = -\varepsilon\theta e_{1,\varepsilon}^{1,\delta-\varepsilon}(\theta), \tag{11}$$

с учетом $\delta = \beta, \quad \theta = \tilde{z}$ и

$$e_{1,\beta}^{1,\beta-1}(\tilde{z}) + (1-\beta) e_{1,\beta}^{1,\beta}(\tilde{z}) = \beta \frac{\left|y+2n\right|}{(x-x_1)^\beta} e_{1,\beta}^{1,0}(\tilde{z}), \qquad \tilde{z} = -\frac{\left|y+2n\right|}{(x-x_1)^\beta}, \tag{12}$$

находим

$$G_{y_1}(x,y;x_1,0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{sign(y+2n)}{(x-x_1)} e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{\left|y+2n\right|}{(x-x_1)^\beta} \right). \tag{13}$$

Анолагично из (9)-(12) имеем:

$$G_y(x,0,x_1,y_1)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{sign(y_1+2n)}{(x-x_1)}\,e_{1,\beta}^{1,0}\left\{-\frac{|y_1+2n|}{(x-x_1)^{\beta}}\right\}. \tag{14}$$

Дифференцируя (13) по y с учетом формул:

$$\frac{d}{dz}e_{1,\beta}^{1,\delta}(z)=e_{\alpha,\beta}^{1,\delta-\beta}(z), \tag{15}$$

учитывая что $z=-\frac{|y+2n|}{(x-x_1)^{\beta}}$, $\frac{dz}{dy}=-\frac{sign(y+2n)}{(x-x_1)^{\beta}}$, получим

$$G_{y_1y}(x,y;x_1,0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(x-x_1)^{1+\beta}}e_{1,\beta}^{1,-\beta}\left(-\frac{|y+2n|}{(x-x_1)^{\beta}}\right). \tag{16}$$

Применив формулу

$$s^{\delta-2}e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta-1}(c\,s^{-\beta})=\frac{d}{ds}\left(s^{\delta-1}e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(c\,s^{-\beta})\right) \tag{17}$$

в (16) с учетом $\mu=1,\ \delta=1-\beta,\ \alpha=1,\ s=x-x_1,\ c=|y+2n|,$ получим

$$G_{y_1y}(x,y;x_1,0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{d}{d(x-x_1)}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{(x-x_1)^{\beta}}e_{1,\beta}^{1,1-\beta}\left(-\frac{|y+2n|}{(x-x_1)^{\beta}}\right)\right], \tag{18}$$

Положив в (18) $y=+0,$ имеем

$$G_{y_1y}(x,+0,x_1,0)=\frac{d}{dx_1}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(x-x_1)^{\beta}}e_{1,\beta}^{1,1-\beta}\left(-\frac{|2n|}{(x-x_1)^{\beta}}\right)\right]. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (8), а затем интегрируя по частям с учетом $\tau(0)=0,$ получим:

$$\nu(x)=-\int_0^x K_1(x,t)\tau'(t)dt+\Phi_0(x), \tag{20}$$

где

$$K_1(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x^{-\beta}e_{1,\beta}^{1,1-\beta}\left(-|2n|/x^{\beta}\right), \tag{21}$$

$$\Phi_0(x)=\int_0^x dx_1\int_0^1 f(x_1,y_1)G_y(x,0,x_1,y_1)dy_1. \tag{22}$$

В силу леммы с учетом [3]

$$te_{\sigma,\beta}^{\mu,\delta}(t)=e_{\sigma,\beta}^{\mu-\sigma,\delta+\beta}(t)-\frac{1}{\Gamma(\mu-\sigma)\Gamma(\delta+\beta)}$$

из (21) получим

$$|K_1(x)|\le C_1x^{-\beta}, \tag{23}$$

Далее, пусть $f(x,y)\in C^1(\bar{\Omega}),\ f(0,y)=0,$ тогда в силу однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения (1) при $y<0$ его решение определяется формулой Даламбера

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau(\xi)+\tau(\eta)\right]-\frac{1}{2}\int_{\xi}^{\eta}\nu(t)dt-\int_{\xi}^{\eta}dt\int_{t}^{\eta}f_1(t,s)ds, \tag{24}$$

где $\tau(x)=u(x,0),\ \xi=x+y,\ \eta=x-y,\ \nu(x)=u_y(x,0),\ f_1(\xi,\eta)=\frac{1}{4}f\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right).$

Из (5) при $y\to 1$ находим

$$u(\theta(x))=\int_0^x G_{y_1}(x,1;x_1,0)\tau(x_1)dx_1+\Phi_1(x), \tag{25}$$

где

$$\Phi_1(x)=\int_0^1\int_0^x f(x_1,y_1)G(x,1;x_1,y_1)dx_1dy_1. \tag{26}$$

В силу (24) из левой части условия (3) находим

$$(u_x+u_y)\big|_{AC}=\tau'(\xi)-\nu(\xi)-2\int_{\xi}^{h(\xi)}f(\xi,s)ds, \tag{27}$$

где $\eta=h(\xi),\ 0\le\xi\le\xi_0,\ h(\xi_0)=1$ - уравнение кривой AC в характеристических переменных ξ,η и $\lambda(\xi)\equiv 1,\ 0\le\xi\le\xi_0.$

Подставляя (25) и (27) в краевое условие (3), имеем

$$\tau'(\xi)-\nu(\xi)-\int_0^x G_{y_1}(x,1;x_1,0)\tau'(x_1)dx_1=\Phi_1(x)+\Phi_2(x), \tag{28}$$

где

$$\Phi_2(x)=2\int_{\xi}^{h(\xi)}f(\xi,s)ds.$$

Исключив $\nu(x)$ из соотношений (20) и (28) после некоторых вычислений получим интегральное уравнение относительно $\tau'(x)$:

$$\tau'(x)-\int_0^x\tau'(x_1)K_2(x,x_1)dx_1=\Phi_3(x), \tag{29}$$

где

$$K_2(x,x_1)=G_{y_1}(x,1;x_1,0)-K_1(x,x_1), \tag{30}$$

$$\Phi_3(x)=\Phi_0(x)+\Phi_1(x)+\Phi_2(x). \tag{31}$$

Используя приведённую выше лемму, для функций Грина можно получить следующие оценки

$$\left|G(x,y;x_1,y_1)\right|\le C_2\left|y-y_1\right|^{-m}(x-x_1)^{m\beta+\beta-1}, \tag{32}$$

$$\left|G_{y_1}(x,y;x_1,0)\right|\le C_3y^{-m}(x-x_1)^{m\beta-1}, \tag{33}$$

$$\left|G_y(x,0;x_1,y_1)\right| \le C_3 y_1^{-m}(x-x_1)^{m\beta-1}, \quad 0<m<1/2. \tag{34}$$

В силу (23), (33) из (30) получим

$$\left|K_2(x,x_1)\right| \le C_6(x-x_1)^{m\beta-1}. \tag{35}$$

С учётом условий, наложенных на функцию $\gamma(x)$, неравенств (32), (34) и $f(x,y)\in C^1(\bar{\Omega}), \quad f(0,y)=0,$ получаем, что $\Phi_3(x)\in C^1(0,1).$

В силу $\Phi_3(x)\in C^1[0,1]$ и (35), уравнение (29) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода со слабой особенностью. Согласно теории интегральных уравнений Вольтерра [5, стр. 41-46] заключаем, что интегральное уравнение (29) однозначно разрешимо в классе $C^1[0,1]$ и его решение дается формулой

$$\tau'(x) = \Phi_3(x) + \int_0^x K_2^*(x,x_1)\Phi_3(x_1)dx_1, \tag{36}$$

где $K_2^*(x,x_1)$ - резольвента ядра $K_2(x,x_1)$, она допускает оценку

$$\left|K_2^*(x,x_1)\right| \le C_7(x-x_1)^{m\beta-1}. \tag{37}$$

Интегрируя (36) от 0 до x с учетом $\tau(0)=0$, получим

$$\tau(x) = \int_0^x \left[1+\int_t^x K_2^*(z,t)dz\right]\Phi_2(t)dt.$$

Подставляя найденную функцию $\tau(x)$ в (20), находим функцию $\nu(x).$ Тогда решение задачи M_1 восстанавливается в области Ω_0 как решение смешанной краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка (см. (5)), а в области Ω_1 - как решение задачи Коши для уравнения (см. (24)). Следовательно, задача M_1 однозначно разрешима. Теорема 1 доказана.

Определение 2. Функцию $u(x,y)\in L_2(\Omega)$ назовем сильным решением задачи M_1, если существует последовательность функций $\{u_n(x,y)\}$, $u_n(x,y)\in P_1$, удовлетворяющих краевым условиям (2), (3), (4) задачи M_1, такая, что последовательности $u_n(x,y)$ и $Lu_n(x,y)$ сходятся в $L_2(\Omega)$ к функциям $u(x,y)$ и $f(x,y)$ соответственно.

Теорема 2. ***Для любой функции любой функции*** $f(x,y)\in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение $u(x,\ y)$ задачи M_1. Это решение принадлежит классу $P_2=\left\{u(x,y):\ u(x,y)\in H^{\ 1}(\Omega)\cap H_{\ y}^{\ 2}(\Omega_1)\cap C(\bar{\Omega}\ )\right\}$ и удовлетворяет неравенству

$$\left\|u(x,y)\right\|_0 \le C_8\left\|f(x,y)\right\|_0, \quad C_8=const>0. \tag{38}$$

Доказательство теоремы 2. Пусть $g(x,y)\in L_2(\Omega),$ тогда докажем справедливость оценку (38). Для этого нам необходимо сначала показать, что

$$\left\|\Phi_3(x)\right\|_{L_2(0,1)} \le C_9\left\|f(x,y)\right\|_{L_2(\Omega)}.$$

Чтобы показать указанную оценку, необходимо доказать её выполнение на каждом слагаемом в разложении функции $\Phi_3(x)$. Сначала рассмотрим выражение $\Phi_0(x).$

С учетом (34), из (22) имеем

$$\left|\Phi_0(x)\right| \le C_3 \int_0^1 \int_0^x (x-x_1)^{\frac{m\beta-1}{2}} y_1^{-a} (x-x_1)^{\frac{m\beta-1}{2}} \left|f(x_1,y_1)\right| dx_1 dy_1. \tag{39}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского к (39), получим

$$\left|\Phi_0(x)\right|^2 \le C_{11} \int_0^1 \int_0^x (x-x_1)^{m\beta-1} y_1^{-2m} dx_1 dy_1 \cdot \int_0^1 \int_0^x (x-x_1)^{m\beta-1} \left|f(x_1,y_1)\right|^2 dx_1 dy_1 \le$$

$$\le C_{17} \int_0^1 \int_0^x (x-x_1)^{m\beta-1} \left|f(x_1,y_1)\right|^2 dx_1 dy_1.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по x на интервале (0,1) и применяя теорему Фубини для изменения порядка интегрирования, получаем

$$\left\|\Phi_0(x)\right\|_{L_2(0,1)} \le C_{12} \int_0^1 dx \int_0^1 dy_1 \int_0^x (x-x_1)^{m\beta-1} \left|f(x_1,y_1)\right|^2 dx_1 = C_{12} \int_0^1 dy_1 \int_0^1 \left|f(x_1,y_1)\right|^2 dx_1 \int_{x_1}^1 (x-x_1)^{m\beta-1} dx.$$

Отсюда следует, что

$$\left\|\Phi_0(x)\right\|_{L_2(0,1)} \le C_{13} \left\| f(x,y) \right\|_{L_2(\Omega_1)}. \tag{40}$$

В силу (32) из (26) имеем

$$\left|\Phi_1(x)\right| \le C_{14} \int_0^1 \int_0^x (x-x_1)^{\frac{m\beta+\beta-1}{2}} \left|y-y_1\right|^{-m} (x-x_1)^{\frac{m\beta+\beta-1}{2}} \left|f(x_1,y_1)\right| dx_1 dy_1. \tag{41}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского к (41), получим

$$\left|\Phi_1(x)\right|^2 \le C_{15} \int_0^1 \int_0^x (x-x_1)^{m\beta+\beta-1} \left|y-y_1\right|^{-2m} dx_1 dy_1 \cdot \int_0^1 \int_0^x (x-x_1)^{m\beta+\beta-1} \left|f(x_1,y_1)\right|^2 dx_1 dy_1 \le$$

$$\le C_{16} \int_0^1 \int_0^x (x-x_1)^{m\beta+\beta-1} \left|f(x_1,y_1)\right|^2 dx_1 dy_1.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по x на интервале (0,1) и применяя теорему Фубини для изменения порядка интегрирования, получаем

$$\left\|\Phi_1(x)\right\|_{L_2(0,1)} \le C_{17} \left\| f(x,y) \right\|_{L_2(\Omega_1)}. \tag{42}$$

Далее рассмотрим оценку третьего слагаемого функции $\Phi_2(x).$ В силу неравенства Коши–Буняковского имеем

$$\left| \int_x^{h(x)} f(x,s) ds \right|^2 \le (h(x)-x) \int_x^{h(x)} \left| f(x,s) \right|^2 ds.$$

Обозначим $C_{18} = \sup_{x\in(0,1)} (h(x)-x).$ Тогда

$$\left|\Phi_2(x)\right|^2 \le 4C_{18} \int_x^{h(x)} \left|f(x,s)\right|^2 ds. \tag{43}$$

Интегрируя обе части неравенства (43) по x на интервале (0,1), получаем

$$\left\|\Phi_2(x)\right\|_{L_2(0,1)} \le C_{17} \left\| f(x,y) \right\|_{L_2(\Omega_1)}. \tag{44}$$

Учитывая оценки (40), (42), (44), из (31) имеем

$$\left\|\Phi_3(x)\right\|_{L_2(0,1)} \le C_{17} \left\| f(x,y) \right\|_{L_2(\Omega_1)}. \tag{45}$$

В силу (37) и (44) из (36) следует, что $\tau'(x) \in L_2(0,1)$ и допускает оценку

$$\left\|\tau'(x)\right\|_{L_2(0,1)} \le C_{23}\left\| f(x,y)\right\|_{L_2(\Omega)}.$$

(46)

Далее, теперь докажем неравенства (38). С учетом (17), лемма и $\tau(0)=0$, применив в (5) интегрирования по частям приведем к следующему виду

$$u(x,y)=\int_0^x\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left((-1)^n sign\left(y+2n\right)e_{1,\beta}^{1,1}\left(-\frac{|2n+y|}{(x-x_1)^{\beta}}\right)\right)\tau'(x_1)dx_1+$$

$$+\int_0^1\int_0^x f(x_1,y_1)G(x,y;x_1,y_1)dx_1dy_1.$$

Для последнего выражения справедливо следующее неравенство:

$$\left|u(x,y)\right|\le\int_0^x\left|\tau'(x_1)\right|\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e_{1,\beta}^{1,1}\left(-\frac{|2n+y|}{(x-x_1)^{\beta}}\right)dx_1+\int_0^1\int_0^x\left|f(x_1,y_1)\right|\left|G(x,y;x_1,y_1)\right|dx_1dy_1.$$

(47)

В силу приведённой выше леммы справедливо следующее неравенство

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n sign\left(y+2n\right)e_{1,\beta}^{1,1}\left(-\frac{|2n+y|}{(x-x_1)^{\beta}}\right)\right|\le$$

$$\le\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(x-x_1)^{2\beta}}{|2n+y|^2}\left(\frac{|2n+y|}{(x-x_1)^{\beta}}\right)^2e_{1,\beta}^{1,1}\left(-\frac{|2n+y|}{(x-x_1)^{\beta}}\right)\le C_{28}.$$

(48)

В силу (32), (48) из неравенства (47) вытекает, что

$$\left|u(x,y)\right|\le C_{28}\int_0^x\left|\tau'(x_1)\right|dx_1+C_{27}\int_0^1\int_0^x\left|f(x_1,y_1)\right|\left|y-y_1\right|^{-m}(x-x_1)^{m\beta+\beta-1}dx_1dy_1.$$

Применяя к этому неравенству неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\left|u(x,y)\right|^2\le C_{29}\int_0^x\left|\tau'(x_1)\right|^2dx_1+C_{29}\int_0^1dy_1\int_0^x\left|y-y_1\right|^{-2m}(x-x_1)^{m\beta+\beta-1}dx_1\cdot\int_0^1\int_0^x(x-x_1)^{m\beta+\beta-1}\left|f(x_1,y_1)\right|^2dx_1dy_1\le$$

$$\le C_{29}\int_0^x\left|\tau'(x_1)\right|^2dx_1+C_{30}\cdot\int_0^1\int_0^x(x-x_1)^{m\beta+\beta-1}\left|f(x_1,y_1)\right|^2dx_1dy_1,$$

(49)

Интегрируя обе части последнего неравенства по области Ω_0 и применяя теорему Фубини, получаем

$$\int_0^1\int_0^1\left|u(x,y)\right|^2dxdy\le C_{29}\left\|\tau'(x)\right\|_{L_2(0,1)}+C_{30}\int_0^1dy_1\int_0^1\left|f(x_1,y_1)\right|^2dx_1\int_0^1dy\int_{x_1}^1(x-x_1)^{m\beta+\beta-1}dx.$$

Отсюда следует, что

$$\left\|u(x,y)\right\|_{L(\Omega_0)}\le C_{31}\left(\left\|\tau'(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\left\|f(x,y)\right\|_0\right).$$

(50)

На основание (46) из (50) получим

$$\left\|u(x,y)\right\|_{L_2(\Omega_0)}\le C_{32}\left\|f(x,y)\right\|_{L_2(\Omega)}.$$

(51)

Оценивая (24) с учетом (46) и неравенство Коши-Буняковского, получим в области Ω_1 оценку

$$\left\|u(x,y)\right\|_{L_2(\Omega_1)}\le C_{33}\left\|f(x,y)\right\|_{L_2(\Omega)}.$$

(52)

Таким образом, из (51) и (52) следует оценка (38).

Теперь покажем, что при $f(x,y)\in L_2(\Omega)$ найденное решение будет сильным. Так как $C_0^1(\bar{\Omega})$ плотно в $L_2(\Omega)$, то для любой функции $f(x,y)\in L_2(\Omega)$ существует последовательность функций $f_n(x,y)\in C_0^1(\bar{\Omega})$ такая, что $\| f_n(x,y)-f(x,y)\|\to 0$, $n\to\infty$. Обозначим $u_n(x,y)=L^{-1}f_n(x,y),$ где L^{-1} - обратный оператор к оператору L задачи M_1. Если вместо функции $f(x,y)$ из выражения (31) подставить функцию $f_n(x,y)$ и учитывать, что $f_n(x,y)\in C_0^1(\bar{\Omega}),$ то, функция $\Phi_{3n}(x)$ принадлежит классу $C^1[0,1].$ Отсюда уравнение (31) можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра второго рода в пространстве $C^1[0,1].$ Следовательно, $u_{xn}(x,0)=\tau_n'(x)\in C^1[0,1].$ Из свойств решений краевой задачи с условиями (2) для уравнения диффузии (см.(5)) и задачи Дарбу для волнового уравнения (см. (24)) получим, что $u_n(x,y)\in P_1$ для всех $f_n(x,y)\in C_0^1(\bar{\Omega}).$

На основание (38) имеем

$$\| u_n(x,y)-u(x,y)\|\le C_{20}\| f_n(x,y)-f(x,y)\|\to 0, \quad n\to\infty.$$

Таким образом, $\{u_n(x,y)\}$ - последовательность, отвечающая опреде-лению сильного решения. Поэтому задача M_1 сильно разрешима для любой правой части $f(x,y)\in L_2(\Omega)$ и оно принадлежит классу P_2. Таким образом, теоремы 2 доказана. ***Теорема 2 доказана.***

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов А. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан. 1986.

2. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука. 2006.

3. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.:

4. Наука, 2005. 199 с.

5. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.

6. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. Москва: Матфизгиз. 1959. 232 с.

7. Бердышев А.С. Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного параболо-гиперболического и смешанного-составного типов. Алматы. 2015. 224 с.

8. Садыбеков М. А. Краевые задачи в областях с отходом от характеристики для уравнений гиперболического и смешанного типов второго порядка. Докт. дисс. Ташкент. 1993.

9. Исломов Б. И., Убайдуллаев У. Ш. Краевая задача для уравнения параболо - гиперболического типа с оператором дробного порядка в смысле Капуто в прямоугольной области. // Научный вестник. Математика. 2017. - № 5. С. 25-30.

10. Исломов Б. И., Абдуллаев О. Х. О нелокальных задачах для уравнения третьего порядка с оператором Капуто и нелинейной нагруженной частью.// Уфимск. матем. журн. 2021. 13(3). С.45–57.

11. Islomov B.I., Akhmadov I.A. Unique Solvability and Existence of Eigenvalues for a Boundary Value Problem with a Deviation out Characteristics for a Parabolic-Hyperbolic Type Equation with a Fractional Derivative. // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2025. 46(7). P. 3332–3349.

12. Mamchuev M.O. Solutions of the main boundary value problems for the time-fractional telegraph equation by the Green function method // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2017. Vol. 20. № 1. P. 190–211.

References

1. Dzhuraev, T. D., Sopuev, A., and Mamazhanov, A. Boundary Value Problems for Equations of Parabolic-Hyperbolic Type. Tashkent: Fan, 1986.

2. Nakhushev, A. M. Problems with Shift for Partial Differential Equations. Moscow: Nauka, 2006.

3. Pskhu, A. V. Partial Differential Equations of Fractional Order. Moscow: Nauka, 2005. 199 p.

4. Samko, S. G., Kilbas, A. A., and Marichev, O. I. Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987. 688 p.

5. Mikhlin, S. G. Lectures on Linear Integral Equations. Moscow: Matfizgiz, 1959. 232 p.

6. Berdyshev, A. S. Boundary Value Problems and Their Spectral Properties for Equations of Mixed Parabolic-Hyperbolic and Mixed-Composite Types. Almaty, 2015. 224 p.

7. Sadybekov, M. A. Boundary Value Problems in Domains with Deviation from the Characteristic for Second-Order Hyperbolic and Mixed-Type Equations. Doctoral Dissertation. Tashkent, 1993.

8. Islomov, B. I., and Ubaydullaev, U. Sh. «A Boundary Value Problem for an Equation of Parabolic-Hyperbolic Type with a Fractional-Order Operator in the Caputo Sense in a Rectangular Domain.» Scientific Bulletin. Mathematics, no. 5 (2017): 25–30.

9. Islomov, B. I., and Abdullaev, O. Kh. «On Nonlocal Problems for a Third-Order Equation with the Caputo Operator and a Nonlinear Loaded Term.» Ufa Mathematical Journal 13, no. 3 (2021): 45–57.

10. Islomov, B. I., and Akhmadov, I. A. «Unique Solvability and Existence of Eigenvalues for a Boundary Value Problem with a Deviation from the Characteristic for a Parabolic-Hyperbolic Type Equation with a Fractional Derivative.» Lobachevskii Journal of Mathematics 46, no. 7 (2025): 3332–3349.

11. Mamchuev, M. O. «Solutions of the Main Boundary Value Problems for the Time-Fractional Telegraph Equation by the Green Function Method.» Fractional Calculus and Applied Analysis 20, no. 1 (2017): 190–211.