NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI, [2026-10]
ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427

01.00.00-FIZIKA-MATEMATIKA
journal.namdu.uz
PHYSICS AND MATHEMATICS

TURLI MATERIALLAR UCHUN ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASINI OSHKOR VA OSHKORMAS SONLI USULLAR YORDAMIDA YECHISH

Amirova Dilnoza Akbar qizi
Rahmonova Nilufar Normurodovna
O‘zRFA Mexanika va inshootlar seysmik mustahkamligi instituti tayanch doktaranti.

Annotatsiya: *Ushbu maqolada turli materiallar uchun issiqlik o‘tkazuvchanlik jarayoni ikki xil yondashuv orqali o‘rganiladi. Issiqlik tarqalishiga oid differensial tenglamalarni analitik usulda yechish murakkab bo‘lgani sababli, masalani sonli hisoblashlar yordamida tadqiq etamiz. Buning uchun chekli ayirmalar usulidan foydalanib, bir o‘lchovli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasiga asoslangan chegaraviy masalani ko‘rib chiqamiz. Tekis plastinka yoki sterjen orqali issiqlik tarqalishini oshkor va oshkormas sonli sxemalar yordamida tahlil qilamiz hamda olingan natijalar asosida materiallarning issiqlik o‘tkazuvchanlik xususiyatlarini baholaymiz.*

Kalit so‘zlar: *Zichlik, solishtirma issiqlik sig‘imi, issiqlik o‘tkazuvchanlik, oshkor funksiya, oshkormas funksiya, harorat.*

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ ЯВНЫМИ И НЕЯВНЫМИ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Аннотация: *В данной статье процесс теплопроводности для различных материалов исследуется с использованием двух различных подходов. Поскольку аналитическое решение дифференциальных уравнений теплопроводности является сложной задачей, рассматривается численный подход к исследованию данной проблемы. Для этого применяется метод конечных разностей и анализируется краевая задача, основанная на одномерном уравнении теплопроводности. Распространение тепла в плоской пластине или стержне изучается с помощью явных и неявных численных схем, а на основе полученных результатов оцениваются теплопроводные свойства материалов.*

Ключевые слова: *Плотность, удельная теплоёмкость, теплопроводность, явная функция, неявная функция, температура.*

SOLUTION OF THE HEAT CONDUCTION EQUATION FOR DIFFERENT MATERIALS USING EXPLICIT AND IMPLICIT NUMERICAL METHODS

Abstract: *This article investigates the heat conduction process in different materials using two different approaches. Since solving heat conduction differential equations analytically is complex, the problem is studied using numerical methods. For this purpose, the finite difference method is applied, and a boundary value problem based on the one-dimensional heat conduction equation is considered. Heat distribution in a flat plate or rod is analyzed using explicit and implicit numerical schemes, and based on the obtained results, the thermal conductivity properties of materials are evaluated.*

Keywords: *Density, specific heat capacity, thermal conductivity, explicit function, implicit function, temperature.*

KIRISH

Issiqlik uzatish jarayonlarini o‘rganish texnika va tabiiy fanlar rivojlanishida har doim muhim o‘rin egallab kelgan. XX asrning boshlarida ushbu yo‘nalishdagi tadqiqotlar, asosan, jadal rivojlanayotgan issiqlik energetikasi sanoatining ehtiyojlari bilan chambarchas bog‘liq edi. Ikkinchi jahon urushidan keyingi davrda esa aviatsiya, yadro energetikasi, raketa texnikasi hamda kosmik texnologiyalarning tezkor rivojlanishi issiqlik uzatish masalalarini yanada chuqur o‘rganishni taqozo etdi [2].

So‘nggi yillarda issiqlik uzatish hodisalarini o‘rganish ko‘lami sezilarli darajada kengaydi. Bu yo‘nalish muhandislikning yetakchi sohalari – kimyoviy muhandislik, metallurgiya, qurilish, neft va gaz qazib olish, mashinasozlik, qishloq xo‘jaligi muhandisligi – hamda fundamental tabiiy fanlarni qamrab oladi. Hozirgi vaqtda issiqlik uzatish jarayonlarini nazariy o‘rganish asosan kompyuterlar yordamida sonli modellashtirishga asoslanadi [4]. Bu esa differensial tenglamalar bilan ifodalanadigan murakkab jarayonlarni sonli hisoblash usullari orqali samarali yechishga imkon beradi. Issiqlik uzatish jarayonlarining sonli modellashtirilishi hozirgi davrda alohida ahamiyat kasb etadi, chunki zamonaviy fan va texnologiyalarning ko‘plab jarayonlarini laboratoriya yoki dala sharoitida tajribalar o‘rganish qiyin, qimmat yoki ayrim holatlarda umuman imkonsizdir.

Radiatsiya, bosimning o‘zgarishi hamda magnit maydonlar kabi tashqi omillar issiqlik o‘tkazuvchanlik jarayoniga sezilarli ta’sir ko‘rsatishi mumkin. Shu sababli issiqlik tarqalish jarayonlarini tahlil qilishda bunday omillarni hisobga olish muhimdir. Issiqlik o‘tkazuvchanlik jarayonini matematik ifodalash uchun dekart koordinatalar sistemasida quyidagi differensial tenglama qo‘llaniladi [3]:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)+Q_w\left(x,y,z,t,T\right) \quad (1)$$

Bu (1) tenglamaga Furye-Kirxgoff tenglamasi deyiladi. Bu yerda $\rho-$zichlik, $\lambda-$issiqlik o‘tkazuvchanlik, $c-$ solishtirma issiqlik sig‘imi, $Q_w\left(x,y,z,t,T\right)$-ichki issiqlik manbalarining quvvati. Geometrik shartlar -jismning shakli va o‘lchamini belgilaydi. Fizik shartlar jismning issiqlik xossalarini va issiqlik tarqalish jarayonining boshlang‘ich holatini belgilaydi. Boshlang‘ich vaqt momentida temperaturaning fazodagi taqsimlanishi quyidagicha ifodalanadi:

$$t=0:T=f(x,y,z)$$

Agar boshlang‘ich momentda temperatura jism bo‘ylab bir xil taqsimlangan bo‘lsa, u holda boshlang‘ich shart ancha soddalashadi [4].

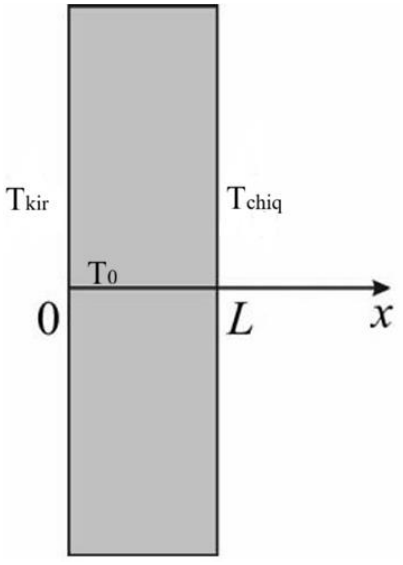
$$t=0:T=T_0=const$$

Chekli ayirmalar usulining qo‘llanilishiga misol sifatida, bir o‘lchovli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasiga asoslangan chegaraviy masalani ko‘rib chiqamiz. Bu yerda tekis plastinka bo‘ylab issiqlikning tarqalish jarayoni tahlil qilinadi (1-rasm). Temperatura faqat plastinka sirtiga perpendikulyar yo‘nalishda o‘zgaradi. Agar OX o‘qi rasmda ko‘rsatilgandek ushbu yo‘nalish bo‘ylab tanlansa, u holda OY va OZ yo‘nalishlarida temperatura o‘zgarmas deb qabul qilinadi. Issiqlik-fizik xossalar temperaturaga bog‘liq emas deb faraz qilamiz. Shu shartlar asosida issiqlik o‘tkazuvchanlikning umumiy tenglamasi soddalashadi va quyidagi bir o‘lchovli ko‘rinishga keltiriladi:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\ 0<x<L\ , \quad (2)$$

Boshlan g‘ich va chegaraviy shartlar quyidagiga teng:

$$\begin{cases} t=0,\ T=T_0=20^\circ C \\ x=0,\ T=T_{kir}=300^\circ C \\ x=L,\ T=T_{chiq}=100^\circ C \end{cases} \quad (3)$$



1-rasm. Masalani geometrik ko‘rinishi

Plastinkaning chegaralarida quyidagi harorat shartlari berilgan: bir uchida temperature T_{kir} ikkinchi uchida esa T_{chiq} Boshlang‘ich vaqtda plastinka bo‘ylab temperaturaning taqsimlanishi T_0 bilan ifodalanadi. Plastinka ichida issiqlik manbalari mavjud emas deb faraz qilinadi. Shunday qilib, masala berilgan boshlang‘ich va chegaraviy shartlar asosida yechilishi lozim bo‘lgan klassik chegaraviy masala hisoblanadi.

Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini analitik usulda yechish ko‘p hollarda murakkab bo‘lgani sababli, biz masalani sonli yondashuv orqali yechamiz. Buning uchun oshkor chekli ayirmalar sxemasidan foydalanamiz. Bu yondashuvda temperatura funksiyasining vaqt bo‘yicha birinchi tartibli, fazoviy o‘zgaruvchiga nisbatan esa ikkinchi tartibli hosilalari chekli ayirmalar yordamida yaqinlashtiriladi [2].

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t},\qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{T_{i+1}^n-2T_i^n+T_{i-1}^n}{\Delta x^2} \tag{4}$$

(4) ni olib borib (1) tenglamaga qo‘yamiz.

$$\rho c\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}=\lambda\left(\frac{T_{i+1}^n-2T_i^n+T_{i-1}^n}{\Delta x^2}\right), i=2,...,N-1, n\geq 0$$

Bu tenglikda bizga T_i^{n+1} nomalum shu nomalumni topamiz.

$$T_i^{n+1}=T_i^n+\frac{\lambda\cdot\Delta t}{\rho\cdot c}\left(\frac{T_{i+1}^n-2T_i^n+T_{i-1}^n}{\Delta x^2}\right),\qquad i=2,...,N-1, n\geq 0 \tag{5}$$

(5) uchun quyidagicha belgilash kiritamiz

$$A=\frac{\lambda\cdot\Delta t}{\rho\cdot c\cdot\Delta x^2}$$

va olib borib (5) ga qo‘ysak quyidagicha tenglik hosil bo‘ladi.

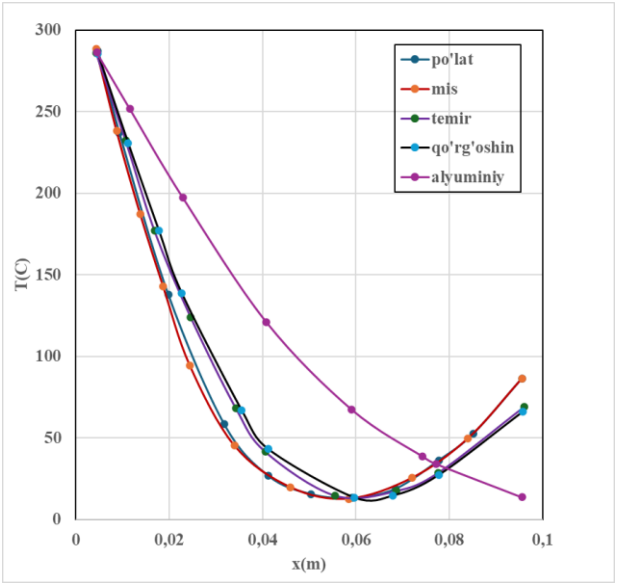
$$T_i^{n+1}=T_i^n+A\left(T_{i+1}^n-2T_i^n+T_{i-1}^n\right) \tag{6}$$

$L=0.1\ m$ va berilgan boshlang‘ich va chegaraviy shartlar bilan $t=20s, t=40s, t=60s, t=80s$ vaqtlarda turli xil materiallar uchun yechim topamiz.Har bir material uchun o‘zgarmas kattaliklar zichlik, solishtirma issiqlik sig‘imi, issiqlik o‘tkazuvchanliklar 1-jadvalda berilgan.

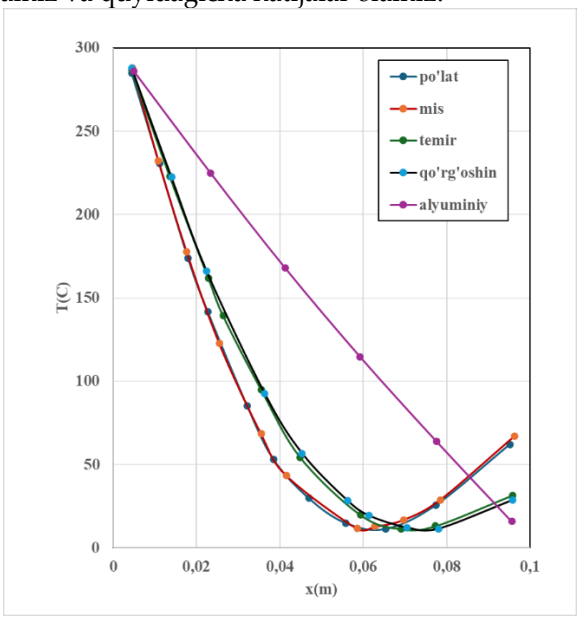
1-jadval.

	po‘lat	**mis**	**temir**	**qo‘rg‘oshin**	**alyuminiy**
Zichlik $\rho\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	7800	8900	7870	11340	2700
solishtirma issiqlik sig‘imi $c\left[\frac{J}{(kg\cdot K)}\right]$	460	385	460	130	900
issiqlik o‘tkazuvchanlik $\lambda\left[\frac{W}{(m\cdot K)}\right]$	46	401	80	35	205

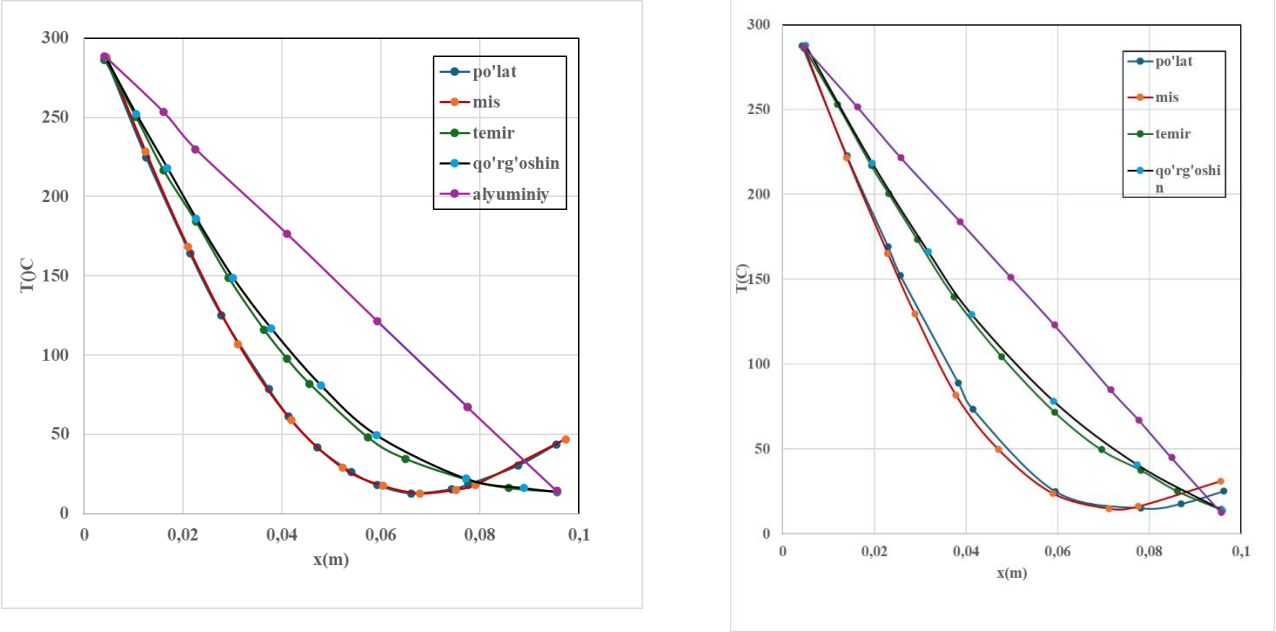
(6) tenglamani 1-jadval ma’lumotlaridan foydalanib yechamiz va quyidagicha natijalar olamiz.



t=20s



t=40s



t=60s t=80s

2-rasm.Turli xil materillar uchun turli xil vaqtda temperatura tarqalishi.Oshkor sxemada.

Endi esa berilgan (2) masala yechimini oshkormas ko‘rinishda qidiramiz. Bu yondashuvda temperatura funksiyasining vaqt bo‘yicha birinchi tartibli, fazoviy o‘zgaruvchiga nisbatan esa ikkinchi tartibli hosilalari chekli ayirmalar yordamida yaqinlashtiriladi [2].

Progon usulidan foydalanib t bo‘yicha birinchi va x bo‘yicha ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t},\qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{T_{i+1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \tag{7}$$

(7) ni olib borib (2) tenglamaga qo‘yamiz.

$$\rho\cdot c\cdot\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}=\lambda\cdot\left(\frac{T_{i+1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right),\qquad i=2,...,N-1, n\geq 0 \tag{8}$$

Bu tenglikda o‘zgaruvchilar oldidagi koeffitsentlar uchun quyidagicha belgilash kiritsak.

$$A_i=C_i=\frac{\lambda}{\Delta x^2},\qquad B_i=\frac{2\cdot\lambda}{\Delta x^2}+\frac{\rho\cdot c}{\Delta t},\qquad F_i=-\frac{\rho\cdot c}{\Delta t}T_i^n$$

(8) tenglama soddaroq ko‘rinishga keladi.

$$A_i\cdot T_{i+1}^{n+1}-B_i\cdot T_i^{n+1}+C_i\cdot T_{i-1}^{n+1}=F_i \tag{9}$$

T_{i-1}^{n+1} ni T_i^{n+1} orqali ifodalab, $T_{i-1}^{n+1}=\alpha_{i-1}\cdot T_i^{n+1}+\beta_{i-1}$ (9) tenglikka olib borib qo‘ysak quyidagi tenglama hosil bo‘ladi.

$$A_i\cdot T_{i+1}^{n+1}-B_i\cdot T_i^{n+1}+C_i\cdot\alpha_{i-1}\cdot T_{i-1}^{n+1}+C_i\cdot\beta_{i-1}=F_i$$

Endi buni soddalashtirsak

$$T_i^{n+1}=\frac{A_i}{B_i-C_i\cdot\alpha_{i-1}}T_{i+1}^{n+1}+\frac{C_i\cdot\beta_{i-1}-F_i}{B_i-C_i\cdot\alpha_{i-1}} \tag{10}$$

(10) tenglama uchun ham

$$\alpha_i=\frac{A_i}{B_i-C_i\cdot\alpha_{i-1}},\qquad \beta_i=\frac{C_i\cdot\beta_{i-1}-F_i}{B_i-C_i\cdot\alpha_{i-1}},\quad i=2,3,...N-1$$

belgilash kiritsak, (10) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi

$$T_i^{n+1}=\alpha_i T_{i+1}^{n+1}+\beta_i \tag{11}$$

Berilgan chegaraviy shartdan

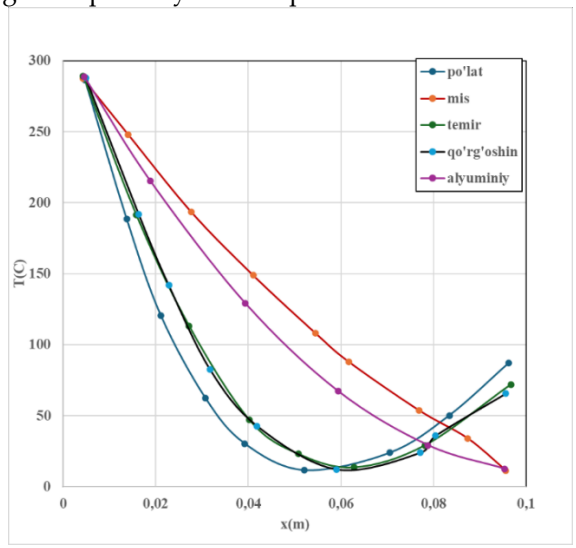
$$T_1^{n+1}=\alpha_1\cdot T_2^{n+1}+\beta_1=T_{kir},\quad \alpha_1=0,\beta_1=T_{kir} \tag{12}$$

va

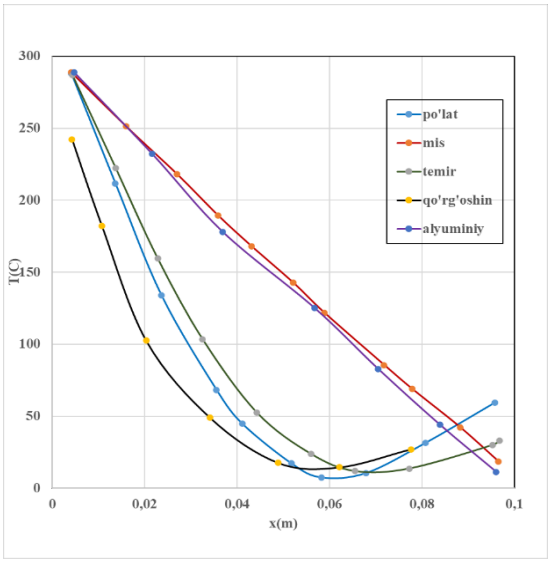
$$T_N^{n+1}=T_{chiq} \tag{13}$$

tengliklar o‘rinli. bo‘ladi.

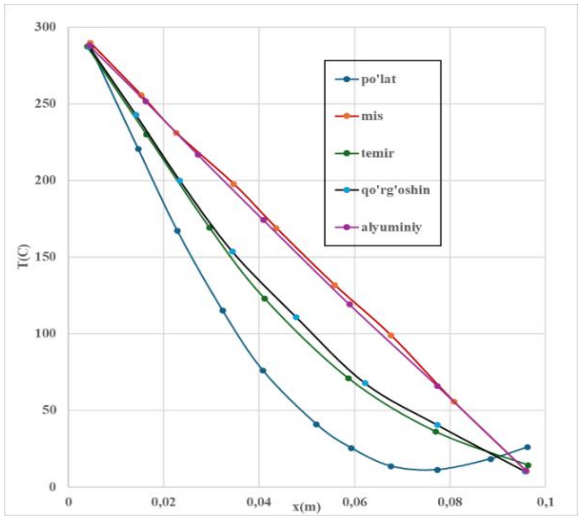
$L = 0.1m$ da berilgan (3)boshlang‘ich va chegaraviy shartlar bilan berilgan masalani yechimini topishda birinchi har bir materiallar uchun alohida α_i, β_i lar keyin esa T_i lar topiladi. Bu holda ham yuqorida o‘rgangan oshkor sxema uchun olingan vaqtlarda yechim topamiz.



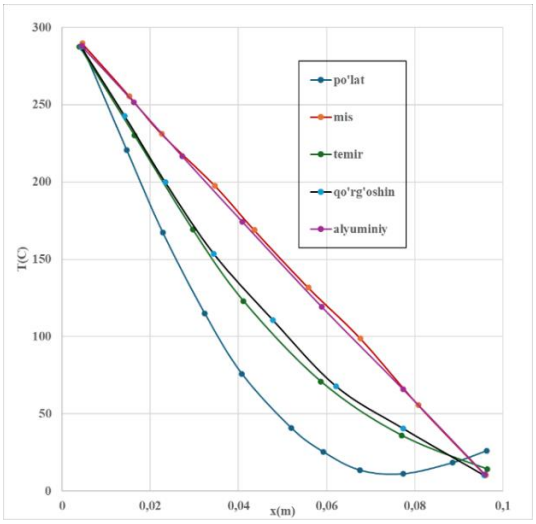
t=20s



t=40s



t=60s



t=80s

3-rasm. Turli xil materillar uchun turli xil vaqtda temperatura tarqalishi. Oshkormas sxemada

Tadqiqot metodologiyasi. Ushbu maqolada ikki usulda issiqlik tarqalish tenglamasi o‘rganilgan. Oshkor va oshkormas usulda berilgan issiqlik tarqalish tenglamasi o‘rganib chiqilgan.

Tahlil va natijalar. 2-rasmdagi grafiklarda temperaturaning vaqt va fazo bo‘yicha o‘zgarishi oshkor sxema yordamida hisoblangan. Natijalar shuni ko‘rsatadiki: vaqt o‘tishi bilan temperature butun sterjen bo‘ylab kamayib boradi,issiqlik o‘tkazuvchanligi katta materiallarda (alyuminiy,mis) temperatura tezroq tarqaladi, qo‘rg‘oshinda temperatura o‘zgarishi sekinroq kichadi, Barqarorlik sharti (Δt cheklovi)bajarilgandagina aniq natija olinadi. *Demak, oshkor sxema sodda va hisoblash tez, ammo barqarorlik sharti bilan chegaralangan. Alyuminiy va mis issiqlikni yaxshi o‘tkazadi,sovitish tizimlari va radiatorlar uchun mos.*

3-rasmdagi grafiklarda masala oshkormas sxema yordamida yechilgan. Natijalar shuni ko‘rsatadiki: temperatura taqsimoti silliq va barqaror ko‘rinishda, vaqt oshgani sari temperatura gradiyenti kamayadi, issiqlik yuqori o‘tkazuvchan materiallarda tezroq muvozanatlashadi. grafiklarda tebranish yoki sonli beqarorlik kuzatilmaydi. Katta vaqt qadami bilan ham barqaror natija olish mumkin. *Demak, oshkormas sxema hisoblash jihatdan murakkabroq, ammo barqarorligi yuqori.*

Xulosa. Ushbu grafiklarda turli materiallar uchun temperaturaning vaqt va fazo bo‘yicha o‘zgarishi ko‘rsatildi. Natijalardan ko‘rinadiki,issiqlik o‘tkazuvchanligi yuqori bo‘lgan materiallarda temperature tezroq tarqaladi. Vaqt o‘tishi bilan temperature gradiyenti kamayib,sistema muvozanat holatga yaqinlashadi. Oshkor sxemada hisoblash jihatdan sodda,ammo barqarorlik sharti bilan chegaralangan. Oshkormas sxemada esa barqarorroq va silliq natija beradi.

Alyuminiy va mis issiqlikni yaxshi o‘tkazadi,sovitish tizimlari va radiatorlar uchun mos. Po‘lat va temir konstruktsion material sifatida qulay. Agar maqsad issiqni tez tarqatish va muvozanatga tez yetish bo‘lsa alyuminiy eng maqbul variant.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Saloxiddinov M.S. «Matematika fizika tenglamalari»-Toshkent: O‘qtuvchi, 2002.

2. Saloxiddinov M.S, O‘rinov A.K .«Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром» Ташкент:ФАН:1997.

3. Jo‘rayev T.J «Matematika fizika tenglamalari».Toshkent. 2003.

4. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. «Разностные методы решения задач теплопроводности»-Томск: Изд-во ТПУ, 2007.

5. Самарский А.А.Теория разностных схем-М.:Наука, 1977.

6. Zohidov .R.A. «Issiqlik texnikasi» Toshkent: «O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati»nashriyoti, 2010.

7. Steven C.Chapra,Raymond P. Canale. «Numerical Methods for Engineers»McGraw-Hill Education,2021.

8. Кошляков Н. С., Глинер Е. Б., Смирнов М. М. - Уравнения в частных производных математической физики Москва: Высшая школа, 1970.

9. Красношчеков Е. А., Сукомел А. С. - Задачи по теплопередаче (Problems in Heat Transfer) Москва: Мир-1977.

10. Frank P. Incropera, David P. DeWitt, Theodore L. Bergman, Adrienne S. Lavine «Fundamentals of Heat and Mass Transfer» John Wiley &Sons, 2020.