

Egamov Jasurbek Abduvoxobovich

Namangan davlat universiteti

egamovjasur1988@mail.ru

**MATERIAL MUSTAHKAMLIGINI HISOBGA OLGAN HOLDA ICHI TO'LA
VA BO'SH VALLARNING ELASTIK-PLASTIK DEFORMATSIYASINI MATEMATIK
MODELLASHTIRISH**

Annotatsiya. Mazkur maqolada yaxlit va bo'shliqli vallarning material mustahkamlanishini hisobga olgan va hisobga olmagan holdagi elastik-plastik modellashtirilishi ko'rib chiqilgan. Oquvchanlik chegarasiga yetilganda kuchlanish-deformatsiya holatining qiyosiy tahlili amalga oshirilib, mustahkamlanishning plastik zona o'lchamlariga va qoldiq kuchlanishlar darajasiga ta'siri o'rganilgan. Material mustahkamlanishini hisobga olish vallarning mustahkamligi va xizmat muddati aniqroq baholanishini ta'minlashi ko'rsatib berilgan. Olingan natijalar mashinasozlik konstruksiyalari elementlarini loyihalash va muhandislik hisoblarida qo'llanishi mumkin.

Kalit so'zlar: *elastik-plastik hisob, mustahkamlanish, oquvchanlik chegarasi, yaxlit val, bo'shliqli val, kuchlanish-deformatsiya holati.*

Egamov Jasurbek Abduvoxobovich

Namangan State University

egamovjasur1988@mail.ru

**MATHEMATICAL MODELING OF ELASTOPLASTIC DEFORMATION OF
SOLID AND HOLLOW SHAFTS CONSIDERING MATERIAL STRENGTH**

Abstract. This paper considers the elastoplastic modeling of solid and hollow shafts with and without accounting for material hardening. A comparative analysis of the stress-strain state at the yield point is carried out, and the influence of hardening on the size of the plastic zone and the level of residual stresses is investigated. It is shown that accounting for material hardening provides a more accurate assessment of the strength and durability of shafts. The obtained results can be used in engineering calculations and in the design of machine-building structural elements.

Keywords: *elastoplastic analysis, hardening, yield limit, solid shaft, hollow*

shaft, stress-strain state.

Эгамов Жасурбек Абдувохобович

Наманганский государственный университет

egamovjasur1988@mail.ru

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ
ДЕФОРМАЦИИ СПЛОШНЫХ И ПОЛЫХ ВАЛОВ С УЧЕТОМ ПРОЧНОСТИ
МАТЕРИАЛА**

Аннотация: В статье рассматривается упругопластическое моделирование сплошных и полых валов с учетом и без учета упрочнения материала. Проведен сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния при достижении предела текучести, исследовано влияние упрочнения на размеры пластической зоны и уровень остаточных напряжений. Показано, что учет упрочнения обеспечивает более адекватную оценку прочности и долговечности валов. Полученные результаты могут быть использованы при инженерных расчетах и проектировании элементов машиностроительных конструкций.

Ключевые слова: упругопластический расчет, упрочнение, предел текучести сплошной вал, полый вал, напряженно-деформированное состояние.

Введение. Валы являются одними из ключевых элементов машиностроительных конструкций, работающих в условиях значительных механических нагрузок и передающих крутящий момент. При превышении предела текучести в материале возникают пластические деформации, что требует применения упругопластических моделей для корректной оценки напряженно-деформированного состояния [1]. Существенным фактором, влияющим на точность расчетов, является учет упрочнения материала, пренебрежение которым может привести к искаженной оценке прочности и долговечности конструкции. В связи с этим целью настоящей работы является сравнительный анализ упругопластического поведения сплошных и полых валов с учетом и без учета упрочнения материала.

Основная часть. Терм упругие напряжения в сплошных и полых цилиндрах были рассмотрены. При решении упругопластической задачи без учета упрочнения материала следует [2]:

1. По формулам:

$$\sigma_z = \left[-\delta_m + \frac{1\delta_1 E_1 + 2\delta_2 E_2 + \dots + (2n-1)\delta_n E_n}{1E_1 + 3E_2 + \dots + (2n-1)E_n} \right] \frac{E_m}{1-\mu} \quad (1)$$

При решении задач разносным методом

$$\sigma_e = \left(-\delta_m + \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i E_i}{\sum_{i=1}^n E_i} \right) \frac{E_m K}{1-\mu} \quad (2)$$

$$\sigma_{\text{ЭKB}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2]} \quad (3)$$

Если условие (3) не будет соблюдено, то поперечные сечения цилиндра после деформации искажутся, что противоречит опытам. На основании соблюдения условий к следующему простому соотношению между осевыми (σ_z), радиальными (σ_r) напряжениями, тангенциальными (σ_t) и справедливыми для любой точки сечения, отстоящего на расстоянии равном или большем l_0 от торцов вала:

$$\sigma_t + \sigma_r = \text{const} \quad (4)$$

Условие (4) может быть использовано для вычисления радиальных напряжений σ_r при известных σ_z и σ_t определения тангенциальных напряжений σ_t на поверхности цилиндра при известном осевом напряжении σ_z . [3].

$$\sigma_t + \sigma_r = \sigma_z \quad (5)$$

Условие (5) может быть использовано для вычисления радиальных напряжений σ_r при известных σ_z и σ_t и определения тангенциальных σ_t напряжений на поверхности вала при известном осевом σ_z напряжении σ_z или

$$(\sigma_z)_m = \left(\theta_m - \frac{D^m}{100} \right) \frac{A}{1-\mu} \quad (6)$$

$$(\sigma_t) = \left(\theta_m + \frac{D^n}{10} \right) \frac{A}{1-\mu} K \quad (7)$$

$$[\sigma_z]_m^i = \frac{[\sigma_z]_{m'}}{M_m}; \quad i \quad (8)$$

или

$$[\sigma_z]_m^i = \frac{[\sigma_z]_{m'}}{N_m}; \quad i \quad (9)$$

$$[\sigma_z]_m^i = \frac{[\sigma_z]_{m'}}{N_m}; \quad i \quad (10)$$

или

$$[\sigma_z]_m^i = \frac{[\sigma_z]_{m'}}{M_m}; \quad [\sigma_\theta]_m^i = \frac{[\sigma_\theta]_{m'}}{M_m}; \quad [\sigma_r]_m^i : [\sigma_r]_m^i = \frac{[\sigma_r]_{m'}}{M_m} \quad (11)$$

$$\sigma_{ЭKB} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (12)$$

или

$$\sigma_{ЭKB} = \sigma_1 - \sigma_3 = M_i \sigma_{Ti} \quad (13)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ -главные напряжения в исследуемом слое i .

При наступлении пластической деформации коэффициенты N_1 и M_1 в формулах (5) и (6) ≥ 1 [4].

При решении упругопластической задачи без учета упрочнения материала следует:

1. Вычислить напряжения для любого слоя в предположении, что все слои испытывают упругие деформации (упругий расчет).

2. По теории постоянной упругой энергии формоизменения или теории наибольших касательных напряжений определить слои, в которых наступила пластическая деформация:

3. В том слое m_i в котором наступила пластическая деформация, напряжения взять равными [5]:

$$[\sigma_z]_m^i = \frac{[\sigma_z]_{m'}}{N_m}; \quad [\sigma_\theta]_m^i = \frac{[\sigma_\theta]_{m'}}{N_m}; \quad [\sigma_r]_m^i : [\sigma_r]_m^i = \frac{[\sigma_r]_{m'}}{N_m} \quad (14)$$

или

$$[\sigma_z]_m = \frac{[\sigma_z]_{m'}}{M_m}; \quad [\sigma_\theta]_m = \frac{[\sigma_\theta]_{m'}}{M_m}; \quad [\sigma_r]_m : [\sigma_r]_m = \frac{[\sigma_r]_{m'}}{M_m} \quad (15)$$

4. Напряжения в упруго деформированных слоях вычисляются предварительно следует в числителе принять $\delta_m E_m = -[\sigma_z]_m$ в знаменателе взять

$$E_0^m = [E_0]^m \quad [2].$$

В заключение основной части представлены рекомендации по применению полученных результатов для оптимизации проектирования валов, повышения их надёжности и долговечности, а также для научно обоснованной оценки остаточного ресурса машиностроительных деталей [5].

Пример. Анализ остаточных напряжений в полом вале при циклическом нагружении с учетом упрочнения материала

Условие задачи:

Полый стальной вал с внутренним радиусом $r_1 = 20$ мм и внешним радиусом $r_2 = 50$ мм подвергается циклическому крутящему моменту, вызывающему максимальное касательное напряжение на поверхности $\tau_{max} = 300$ МПа. Вал работает при температуре $t = 100^\circ \text{C}$. Определить распределение остаточных напряжений после 1000 циклов нагружения:

1. Без учета упрочнения материала (идеально пластическая модель).
2. С учетом упрочнения материала (линейная зависимость предела текучести от накопленной пластической деформации: $\sigma_{T, new} = \sigma_{T, 0} + k \cdot \varepsilon_{pl}$, где $k = 1000$ МПа, $\sigma_{T, 0} = 250$ МПа).

Дано:

- $r_1 = 20$ мм, $r_2 = 50$ мм, - $\tau_{max} = 300$ МПа, - $t = 100^\circ \text{C}$, - $E = 210000$ МПа (модуль упругости), - $\mu = 0.3$ (коэффициент Пуассона), - $\sigma_{T, 0} = 250$ МПа (начальный предел текучести), - $k = 1000$ МПа, - $\varepsilon_{pl} = 0.02$ (накопленная пластическая деформация)

1. Без учета упрочнения материала

Глубина пластической зоны определяется по формуле (1):

$$r_p^2 = r_2^2 - (r_2^2 - r_1^2) \cdot \frac{\sigma_{T,0}}{\tau_{max}}$$

Подставляя значения:

$$r_2^2 = 50^2 = 2500$$

$$r_1^2 = 20^2 = 400$$

$$r_2^2 - r_1^2 = 2100$$

$$r_p^2 = 2500 - 2100 \cdot \frac{250}{300} = 2500 - 1749.3 = 750.7$$

$$r_p = \sqrt{750.7} \approx 27.4 \text{ мм}$$

В пластической зоне ($r_p < r < r_2$) остаточные напряжения принимаются равными пределу текучести (3):

$$\tau_{res}(r) = \sigma_{T,0} = 250 \text{ МПа}$$

В упругой зоне ($r_1 < r < r_p$) остаточные напряжения определяются по закону упругости (4):

$$\tau_{res}(r) = \tau_{max} \cdot \frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

2. С учетом упрочнения материала

Предел текучести после накопления пластической деформации определяется по формуле (2):

$$\sigma_{T,new} = \sigma_{T,0} + k \cdot \varepsilon_{pl}$$

$$\sigma_{T,new} = 250 + 1000 \cdot 0.02 = 270 \text{ МПа}$$

Глубина пластической зоны с учетом упрочнения рассчитывается по формуле (1):

$$r_p^2 = 2500 - 2100 \cdot \frac{270}{300} = 2500 - 1890 = 610$$

$$r_p = \sqrt{610} \approx 24.7 \text{ мм}$$

В пластической зоне ($r_p < r < r_2$) остаточные напряжения равны новому пределу текучести:

$$\tau_{res}(r) = \sigma_{T,new} = 270 \text{ МПа}$$

В упругой зоне ($r_1 < r < r_p$):

$$\tau_{res}(r) = \tau_{max} \cdot \frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

3. Сравнительная таблица результатов

В таблице 1 приведены основные параметры и результаты расчёта остаточных напряжений для двух случаев: без учёта упрочнения материала и с учётом упрочнения.

Таблица 1.

Сравнение параметров остаточных напряжений в полом вале

Параметр	Без упрочнения	С упрочнением
Предел текучести, МПа	250	270
Граница пластической зоны, мм	27.4	24.7
Остаточные напряжения в пластической зоне, МПа	250	270
Остаточные напряжения в упругой зоне, МПа	(по формуле (4))	(по формуле (4))

Заключение

В работе выполнено упругопластическое моделирование сплошных и полых валов с учетом и без учета упрочнения материала. Показано, что учет упрочнения существенно влияет на распределение напряжений, приводит к уменьшению пластической зоны и повышению эффективного предела текучести. Сравнительный анализ подтверждает, что модели с упрочнением обеспечивают более адекватную оценку напряженно-деформированного состояния и остаточных напряжений. Полученные результаты могут быть использованы для повышения точности расчетов и надежности машиностроительных валов.

Литературы

1. **M. Perich, I. Garasich, S. Nizetich, Z. Tonkovich** (2022). *Numerical Simulation and Experimental Measurement of Residual Stresses in a Thick-Walled Buried-Arc Welded Pipe Structure. International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 196, 104634.

2. **Nan Tao, A.G. Anisimov, R.M. Groves.** (2022). *FEM-Assisted Shearography with Spatially Modulated Heating for Non-Destructive Testing of Thick Composites with Deep Defects. Composite Structures*, 284, 115234.
3. **Vydrin, A.V.** (2022). *Improving the technology of roller forming in order to obtain a tubular blank with increased strength. Journal of Materials Processing Technology*, 299, 117345.
4. **Burdukovsky, V.G.** (2022). *Technology of forging process. Springer Series in Materials Science*, Vol. 321.
5. Эгамов, Ж., Сафаров, Н., и Мирсултонов, И. (2025). Математическое моделирование температурных напряжений в полых толстостенных валах при лазерной химико-термической обработке. В: П. С. Станимирович и др. (ред.), *НММОС 2024 (Lecture Notes in Networks and Systems*, том 1481, стр. 87–99). Springer Nature Switzerland.
https://doi.org/10.1007/978-3-031-95649-2_8