

Васиева Хилола Голиб кизи
Национальный университет Узбекистана, докторант PhD

E-mail: vasiyeva98@gmail.com

Тел: +998 90 991 45 15

УДК 159.9(575.1)

МЕТОД РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ИГР НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ

Аннотация: В данной работе изучены линейные дифференциальные игры, описываемые системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа при интегральных ограничениях на управления игроков с точки зрения возможности завершения преследования. Исследованы свойства разрешающей функции. Для решения поставленной задачи используются идеи метода разрешающих функций, и с помощью этого метода получены новые достаточные условия для возможности завершения преследования за определённое гарантированное время.

Ключевые слова: дифференциальная игра, задача преследования, интегральное ограничение, разрешающая функция, дифференциально-разностные уравнения нейтрального типа, преследователь, убегающий, управление.

Vasiyeva Hilola G'olib qizi
O'zbekiston milliy universiteti tayanch doktoranti

BOSHQARUVLARI INTEGRAL CHEGARALANISHLI NEYTRAL TIPDAGI DIFFERENSIAL-AYIRMALI O'YIN UCHUN HAL QILUVCHI FUNKSIYALAR USULI

Annotatsiya: Ushbu maqolada o'yinchilarning boshqaruvlari integral chegaralanishli neytral turdagi chiziqli differentsial-ayirmali tenglamalar tizimi bilan tavsiflangan chiziqli differentsial o'yinni quvish masalasi chekli vaqt oralig'ida o'yinni yakunlash nuqtai nazaridan o'rganilgan. Qo'yilgan masalani yechishda hal qiluvchi funksiyalar usulining g'oyalaridan keng foydalanilgan va bu usul yordamida quvishni ma'lum bir kafolatlangan vaqt ichida yakunlash mumkin bo'lishi uchun yangi yetarli shartlar olingan.

Kalit so'zlar: differentsial o'yin, quvish masalasi, integral cheklov, hal qiluvchi funksiya, neytral tipdagi differentsial-ayirmali tenglamalar, quvuvchi, qochuvchi, boshqaruv.

METHOD OF RESOLVING FUNCTIONS FOR DIFFERENTIAL-DIFFERENCE GAMES OF NEUTRAL TYPE WITH INTEGRAL CONSTRAINTS ON CONTROLS

Annotation: *This paper studies linear differential games described by a system of linear differential-difference equations of neutral type with integral constraints on player control from the point of view of the possibility of completing pursuit. The properties of the resolving function are studied. To solve the problem, the ideas of the resolving function method are used, and with the help of this method, new sufficient conditions are obtained for the possibility of completing the pursuit within a certain guaranteed time.*

Key words: *differential game, pursuit problem, integral constraint, admissibility function, neutral type differential-difference equations, pursuer, evader, control.*

Введение

Теория конфликтно управляемых процессов представляет собой интенсивно развивающийся раздел современной математики. В данной теории исследуются задачи управления динамическими процессами в условиях конфликта, который предполагает наличие двух или более сторон, способных воздействовать на процесс с противоположными или не совпадающими целями и оптимизировать заданные функционалы качества процесса. Конфликтно управляемые процессы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, называют дифференциальными играми.

Систематическое развитие теории дифференциальных игр началось в конце 50-х и начале 60-х годов XX столетия. Прогресс теории дифференциальных игр связан прежде всего с именами Л.С. Понтрягина, Н.Н. Красовского и Р. Айзекса.

Основные результаты теории дифференциальных игр относятся преимущественно к случаю, когда на управления игроков наложены интегральные ограничения. Стремление к большей адекватности математических моделей практическим задачам обусловило необходимость изучения дифференциальных игр с интегральными и другими ограничениями. Динамические системы с интегральными ограничениями на управления игроков имеют важное прикладное значение. Поэтому все методы в теории дифференциальных игр, которые возникают, как правило,

для геометрических ограничений на управления игроков, впоследствии переносятся на случай интегральных ограничений.

Изучению дифференциальных игр с интегральными ограничениями посвящено довольно много работ: Н.Ю. Сатимова [2], А.А. Азамова, Н.А. Мамадалиева [3], А.А. Чикрия [4], А.А. Чикрия, А.А. Белоусова [5], Мамадалиева Н.А., Мустапокулова Х.Я., Абдуалимовой Г.М. [6], Б.Т. Саматова [7], Н.А. Мамадалиева [8, 9] и др.

В настоящее время при создании и исследовании математических моделей в большинстве случаев использование обыкновенных дифференциальных уравнений уже недостаточно. Более адекватным является использование аппарата дифференциально-разностных уравнений.

В настоящей работе основное внимание уделяется исследованию задачи преследования, описываемой системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа при интегральных ограничениях на управления игроков. Надо отметить, что данные задачи в случае без запаздываний рассмотрены в работах [5]. Для решения поставленной задачи акцент делается на обоснование и углубленное изучение метода разрешающих функций. Формулируется аналог условия Л.С. Понтрягина, позволяющий получить достаточные условия для разрешимости задачи преследования за некоторое гарантированное время. Данная работа непосредственно примыкает к исследованиям [5, 6, 7, 9].

1. Постановка задачи, схема метода

Пусть движение вектора z в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ описывается системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа [9],

$$\dot{z}(t) = Az(t) + \sum_{i=0}^m B_i \dot{z}(t - h_i) + \sum_{i=0}^m C_i z(t - h_i) + Du(t) - Fv(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))$ – состояния фазовых координат из пространства $\mathbb{R}^n, n \geq 1$; $A, B_i, C_i, (i = 1, 2, \dots, m), m \geq 0$; D, F – постоянные матрицы размерности $(n \times n), (n \times n), (n \times n), (n \times p)$ и $(n \times q)$, соответственно. Функция $u(t) \in \mathbb{R}^p, p \geq 1, v(t) \in \mathbb{R}^q, q \geq 1$ называются управлениями преследующего и убегającego игроков соответственно. $h_0 < h_1 < \dots < h_m$ – константы. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено терминальное множество, являющееся линейным подпространством

$M \neq \mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$, - n, p, q , мерные векторные евклидовы пространства соответственно.

Начальным положением для преследования (1) является n -мерная абсолютно непрерывная функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке $[-h_m, 0]$, т.е.

$$\left\{ \varphi(\cdot) : \varphi(t) = z(t), t \in [-h_m, 0], z(0) = \varphi(0) \in \mathbb{R}^n, M \right\}. \quad (2)$$

Пусть τ – произвольное положительное число и $t \in I = [0, \tau]$. Движение точки $z(t)$ (см. (1)) начинается из начального положения $\varphi(\cdot)$ и происходит под воздействием измеримых по Лебегу управлений $u(t), v(t)$, суммируемых по Лебегу вместе с $|u(t)|^2, |v(t)|^2$, на $I = [0, \tau]$, которые удовлетворяют следующим интегральным ограничениям вида:

$$\int_0^\tau \|u(t)\|^2 dt \leq 1, \quad \int_0^\tau \|v(t)\|^2 dt \leq 1, \quad (3)$$

где $|u|, |v|$, означают длины векторов u и v . В дальнейшем измеримость и суммируемость функций понимаются в смысле Лебега.

Управление $u(t)$ (см. (1)) находится в распоряжении преследующего игрока, а управление $v(t)$ (см. (1)) находится в распоряжении убегающего игрока. Измеримые функции $u(t), v(t), 0 \leq t < +\infty$, удовлетворяющие ограничениям (3), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков соответственно.

Преследование начинается из начального положения $\varphi(\cdot)$ и считается законченным, когда фазовая точка $z(t)$ (см. (1)) впервые попадает на терминальное множество M в момент времени $t_1 \geq 0$, т.е. когда $z(t_1) \in M$, не нарушая ограничения (3). Цель убегающего игрока состоит в том, чтобы по возможности оттянуть окончание игры, т.е. убегающий игрок может использовать произвольное измеримое управление, удовлетворяющее ограничению (3).

Определение 1.1. Пусть $K(t)$ — единственная матричная функция, обладающая следующими свойствами [10]:

а) $K(t) = \tilde{0}, t < 0, \tilde{0}$ - нулевая матрица порядка n ; б) $K(0) = E$, где E -

единичная матрица порядка n ; в) функция $\sum_{i=0}^m C_i K(t - h_i)$ непрерывна на $[0, +\infty)$; г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t) + \sum_{i=1}^m B_i \dot{K}(t - h_i) + \sum_{i=0}^m C_i K(t - h_i), \text{ при } t > 0. \quad (4)$$

Заметим, что матричная функция $K(t)$, удовлетворяющая условиям а)–г), может быть получена обычным методом последовательного интегрирования уравнения (4). Функция $K(t)$ принадлежит классу C^1 при $t > 0$.

Функциям $u(\cdot), v(\cdot)$ и начальному положению $\varphi(\cdot)$ ставится в соответствие траектория $z(t)$, $0 \leq t < +\infty$, уравнения (1), выходящая при $t=0$ из начального положения $\varphi(\cdot)$.

Пусть допустимые управления $u(t), v(t)$ выбраны на отрезке $[0, t]$, $t > 0$, тогда решение $z(t)$ из формулы Коши для процесса (1) при начальном условии $(z(r) = \varphi(r), -h_m \leq r \leq 0)$, следует следующее представление [9,10]:

$$z(t) = \left[K(t) - \sum_{i=1}^m K(t - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 K(t - r - h_i) [B_i \dot{\varphi}(r) + C_i \varphi(r)] dr + \\ + \int_0^t K(t - r) [Du(r) - Fv(r)] dr. \quad (5)$$

Для определения решения $z(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, уравнения (1) при начальном условии наиболее естественным методом является так называемый метод последовательного интегрирования по шагам, с помощью которого решение продолжается вперед, т.е. в направлении возрастания t от интервала к интервалу. Этот метод дает возможность определить решение $z(t)$, $0 \leq t \leq \tau$ на конечном отрезке и одновременно доказывает существование решения и, более того, дает процедуру фактического вычисления этого решения.

Определение 1.2. Будем говорить, что в игре (1), (3) из начального положения $\varphi(\cdot)$ возможно завершение преследования за время $T = T(\varphi(\cdot))$, $0 \leq T < +\infty$, если существует функция $\tilde{u}(t, v)$, $0 \leq t < +\infty$, $v \in \mathbb{R}^q$, $\tilde{u}(t, v) \in \mathbb{R}^p$, что для произвольной суммируемой с квадратом функции $v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, $v(t) \in \mathbb{R}^q$, удовлетворяющей неравенству $\|v(\cdot)\|_{L_2[0, +\infty)} \leq 1$, функция $u(t) = \tilde{u}(t, v(t))$, $0 \leq t < +\infty$, является функцией с суммируемым квадратом, удовлетворяет неравенству $\|u(\cdot)\|_{L_2[0, +\infty)} \leq 1$ и траектория $z(t)$, $0 \leq t < +\infty$, соответствующая управлениям $(u(t), v(t))$ уравнения (1) с учетом начального условия (2),

попадает на терминальное множество M при некотором $t = t^* \in [0, T]$, т.е. удовлетворяет включению $z(t^*) \in M$. При этом для ведения преследования догоняющему нужно знать информацию об объектах. Предполагается, что преследователь знает: в каждый момент времени $t \geq 0$ решение $z(s)$ на отрезке $t - h_m \leq s \leq t$ и управление $v(t)$ в каждый момент времени $t \geq 0$.

Число $T(\varphi(\cdot))$ называется временем преследования из точки $\varphi(\cdot)$, функция $\tilde{u}(t, v), 0 \leq t \leq T(\varphi(\cdot)), v \in \mathbb{R}^q$, - функцией преследования.

Под решением задачи преследования понимается: а) нахождение начальных положений $\varphi(\cdot)$, из которых в игре (1), (3) возможно завершение преследования в смысле введенного выше определения; б) нахождение в явном виде или указание способа построения функции преследования $\tilde{u}(t, v)$.

Требуется найти начальные положения $\varphi(\cdot)$, из которых в игре (1), (3) возможно завершение преследования за конечное время T .

Отметим, что для нас интересен случай, когда $h_i > 0$, т.е. когда уравнения (1) содержат запаздывание.

Сформулируем предположение на параметры игры (1), (3), которое можно называть аналогом условия Л.С. Понтрягина [1] для дифференциальных игр, описываемых системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа при интегральных ограничениях на управления игроков.

Пусть π — оператор ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на $L: \pi: \mathbb{R}^n \rightarrow L$.

Пусть терминальное множество M является линейным подпространством $\mathbb{R}^n$.

2. Формулировка основных результатов

Теперь сформулируем достаточное условие для возможности завершения преследования в игре (1), (2), (3). Завершение преследования понимается в смысле определения 1.2.

Предположение 2.1. Существует число $\alpha, 0 < \alpha < 1$, такое, что для всех положительных t имеет место включение

$$\pi K(t)FS^q \subset \alpha \pi K(t)DS^p, \quad (6)$$

где $S^p = \left\{ u \in \mathbb{R}^p : \|u(\cdot)\|_{L_2[0, +\infty)} \leq 1 \right\}$ и $S^q = \left\{ v \in \mathbb{R}^q : \|v(\cdot)\|_{L_2[0, +\infty)} \leq 1 \right\}$ - единичные шары в пространствах управлений.

В дальнейшем будем считать, что включение (6) на параметры игры (1) выполнено. Зафиксируем некоторое начальное положение $\varphi(\cdot)$. Введем в рассмотрение вектор-функцию, определенную следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi[\tau, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] = & \left[K(\tau) - \sum_{i=0}^m K(\tau - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \\ & + \sum_{i=0}^m \int_{-h_i}^0 K(\tau - t - h_i) [B_i \dot{\varphi}(t) + C_i \varphi(t)] dt - \int_0^{\tau} \tilde{w}(t) dt, \end{aligned} \quad (7)$$

где функция $\tilde{w}(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, определяется ниже. Положим

$$\eta[\tau, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] = \begin{cases} \frac{\xi[\tau, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]}{\|\xi[\tau, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]\|} & \text{при } \xi[\tau, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] \neq 0, \\ \eta^0 & \text{при } \xi[\tau, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где η^0 — произвольный единичный вектор из L .

Можно показать, что если для некоторого положительного τ функция $\xi[\tau, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] = 0$, то разрешима задача преследования к моменту τ . Поэтому в дальнейшем предполагается, что функция $\xi[\tau, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] \neq 0$ для всех $\tau \geq 0$.

Введем вспомогательное многозначное отображение вида [5]

$$\begin{aligned} \hat{W}(\tau, t, v) = & \left\{ \lambda \in R : \lambda \eta[\tau, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] + \pi K(t) F v + \tilde{w}(t) \in \right. \\ & \left. \in \sqrt{(1 - \alpha) \|\xi[\tau, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]\|^{-1} \lambda + \alpha \|v\|^2} \cdot \pi K(t) D S^p \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $(\tau, t, v) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times S^q$.

Из предположения 1 следует, что многозначное отображение $\hat{W}(\tau, t, v)$ непусто и непрерывно на множестве $[0, +\infty) \times [0, +\infty) \times S^q$, то в силу утверждения 1.3.1 [5] многозначное отображение $\hat{W}(\tau, t, v)$ полунепрерывно сверху, значит, борелевское. Следовательно, согласно лемме 1.3.6 [5] существует хотя бы один борелевский селектор $\tilde{w}(t)$, $\tilde{w}(t) \in \hat{W}(\tau, t, v)$, $t \geq 0$. Обозначим

$$G^* = \{ \tilde{w}(\cdot) : \tilde{w}(t) \in \hat{W}(\tau, t, v), \quad t \geq t_0 \},$$

совокупность борелевских селекторов многозначного отображения $\hat{W}(\tau, t, v)$.

Далее с помощью многозначного отображения (9) определим так называемую разрешающую функцию следующим образом [5, 7]:

$$\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) = \sup \hat{W}(\tau, t, v),$$

здесь в качестве супремума берется точная верхняя грань элемента множества $\hat{W}(\tau, t, v)$.

Теперь исследуем некоторые свойства вспомогательного многозначного отображения и разрешающей функции $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v)$.

Введем обозначение

$$\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t) = \inf \left\{ \lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) : \int_0^t \|v(t)\|^2 dt \leq 1 \right\}.$$

Предположение 2.2. Для начального положения $\varphi(\cdot)$ существует момент времени $\tau = \tau_1(\varphi(\cdot)) > 0$ такое, что: а) функция $\lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, \tau_1 - t, v)$, а также суперпозиция $\lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, \tau_1 - t, v(t))$, $0 \leq t \leq \tau_1$ функции $\lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, \tau_1 - t, v)$, $0 \leq t \leq \tau_1$, $v \in \mathbb{R}^q$, и произвольной суммируемой с квадратом функции $v = v(t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$, для которой $\|v(\cdot)\|_{L_2[0, +\infty)} \leq 1$, являются суммируемыми; б) выполнено неравенство

$$|\xi[\tau_1, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]| - \int_0^{\tau_1} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, \tau_1 - t) dt \leq 0.$$

Теорема 2.1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (3) выполнены предположения 2.1, 2.2. Тогда в игре (1) при ограничениях (3) возможно завершение преследования из начального положения $\varphi(\cdot)$ за конечное время $T = \tau_1(\varphi(\cdot))$.

Доказательство. Условимся писать момент времени T , удовлетворяющий условиям теоремы, вместо $\tau_1(\varphi(\cdot))$. Зафиксируем его. Возможны два случая: 1) $\xi[T, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] \neq 0$, 2) $\xi[T, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] = 0$. Рассмотрим вначале случай 1) т.е. пусть $\xi[T, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] \neq 0$.

Поскольку в силу леммы 2.3 разрешающая функция $\lambda(T, T - t, v(t), \varphi(\cdot))$ является измеримой по Борелю, то для всех $(t, v) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^q$ выполняется следующее включение

$$\begin{aligned} & \lambda(T, T - t, v(t), \varphi(\cdot)) \eta[T, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] + \pi K(T - t) F v + \tilde{w}(T - t) \in \\ & \in R^1(T, T - t, \lambda, v(t), \alpha) - \pi K(T - t) D S^p, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} & R^1(T, T - t, \lambda, v(t), \alpha) = \\ & = \sqrt{(1 - \alpha) |\xi[T, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]|^{-1} \lambda(T, T - t, v(t), \varphi(\cdot)) + \alpha \|v(t)\|^2}. \end{aligned}$$

Отметим, что включение (10) является измеримым по Борелю, следовательно, зависит от (t, v) и непрерывно от $u \in S^p$.

По теореме об измеримом выборе [5] следует, что у этого включения (см. (10)) существует однозначная измеримая по Борелю ветвь $w(t, v) \in S^p$ такая, что имеет место следующее равенство

$$\begin{aligned} \lambda(T, T-t, v(t), \varphi(\cdot)) \eta[T, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] + \pi K(T-t) Fv + \tilde{w}(T-t) = \\ = R^1(T, T-t, \lambda, v(t), \alpha) \cdot \pi K(T-t) Dw(t, v), \end{aligned} \quad (11)$$

для всех $(t, v) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^q$. Следовательно, исходя из этой же теоремы, можно сделать вывод, что существует однозначная измеримая по Борелю ветвь $\tilde{w}(t, v) \in S^p$, для которой справедливо равенство

$$\pi K(T-t) Fv + \tilde{w}(T-t) = \sqrt{\alpha \|v(t)\|^2} \cdot \pi K(T-t) D\tilde{w}(t, v), \quad (12)$$

при всех $(t, v) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^q$.

Предположим, что убегающий игрок использует на отрезке $[0, T]$ произвольное измеримое по Лебегу управление $v(t)$, которое удовлетворяет интегральному ограничению

$$\int_0^T \|v(t)\|^2 dt \leq 1.$$

В силу п. б) предположения 2.2 утверждается, что существует момент времени $T^* = T^*(\varphi(\cdot))$, $T^* \in [0, T]$, $T^* \leq T$, такой, что

$$\int_0^{T^*} \lambda(T, T-t, v(t), \varphi(\cdot)) dt \neq \xi[T, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)],$$

(если таких моментов времени более одного, то наименьший из них обозначим через T^*). Ясно, что если $\xi[T, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] = 0$, то можно считать $T^*(\varphi(\cdot)) = 0$. Пусть $\xi[\tau, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] \neq 0$ и

$$|\xi[T, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]| - \inf_0^T \int_0^t \lambda(T, T-t, v(t), \varphi(\cdot)) dt > 0,$$

на отрезке $[0, T]$.

Тогда в ходе игры рекомендуем преследователю строить свое управление $u(t) = \tilde{u}(t, v(t))$, $0 \leq t \leq T$, следующим образом:

$$u(t) = \begin{cases} R^1(T, T-t, \lambda, v(t), \alpha) \cdot w(T-t, v(t)) & \text{при } t \in [0, T^*], \\ \sqrt{\alpha \|v(t)\|^2} \cdot \tilde{w}(T-t, v(t)) & \text{при } t \in (T^*, T]. \end{cases} \quad (13)$$

Такой закон управлений преследователя является контруправлением с одним переключением.

Вначале убедимся, что выбранное таким образом управление $u(t) = \tilde{u}(t, v(t))$, $0 \leq t \leq T$ (см. (13)), удовлетворяет интегральному ограничению (3). Действительно, в силу неравенства Коши-Буняковского [9] имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u(t)\|^2 dt &= \int_0^T (1 - \alpha) |\xi[T, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]|^{-1} \lambda(T, T - t, v(t), \varphi(\cdot)) + \\ &+ \alpha \|v(t)\|^2 \int_0^T \|w(T - t, v(t))\|^2 dt + \int_0^T \alpha \|v(t)\|^2 \|\tilde{w}(T - t, v(t))\|^2 dt \leq \\ &\leq (1 - \alpha) |\xi[T, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)]|^{-1} \int_0^T \lambda(T, T - t, v(t), \varphi(\cdot)) dt + \alpha \int_0^T \|v(t)\|^2 dt \leq 1, \end{aligned}$$

что и означает допустимость управления $u(t) = \tilde{u}(t, v(t))$, $0 \leq t \leq T$.

Отметим, что для произвольной измеримой функции $v = v(t)$, $0 \leq t \leq T$, $v(t) \in \mathbb{R}^q$, суперпозиция $\tilde{u}(t, v(t))$, $0 \leq t \leq T$, функции $\tilde{u}(t, v)$, $0 \leq t \leq T$, $v \in \mathbb{R}^q$, является измеримой по Лебегу функцией [9].

Покажем, что предложенный способ управления $\tilde{u}(t, v(t))$, $0 \leq t \leq T$ (см. (13)), позволяет завершить преследование при произвольном допустимом управлении $v = v(t)$, $0 \leq t \leq T$, в момент времени T . Для этого подставим управления $u(t)$, $v(t)$, $0 \leq t \leq T$, в уравнение (1). Далее, для решения $z(T)$ полученного уравнения (1) с учетом начального условия (3) по формуле Коши (см. (5)) после его проектирования на L , и также прибавляя и вычитая

величину $\int_0^T \tilde{w}(T - t) dt$, приходим к следующему соотношению (см. (11) - (13)):

$$\begin{aligned} \pi z(T) &= \left[\pi K(T) - \sum_{i=0}^m \pi K(T - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=0}^m \int_{h_i}^0 \pi K(T - t - h_i) [B_i \dot{\varphi}(t) + C_i \varphi(t)] dt - \\ &- \int_0^T \pi K(T - t) [D \tilde{u}(t, v(t)) - F v(t)] dt = \left[\pi K(T) - \sum_{i=0}^m \pi K(T - h_i) B_i \right] \varphi(0) + \\ &+ \sum_{i=0}^m \int_{h_i}^0 \pi K(T - t - h_i) [B_i \dot{\varphi}(t) + C_i \varphi(t)] dt - \int_0^T \tilde{w}(T - t) dt + \int_0^T \tilde{w}(T - t) dt - \\ &- \int_0^T \pi K(T - t) D \tilde{u}(t, v(t)) dt - \int_T^T \pi K(T - t) D \tilde{u}(t, v(t)) dt + \int_0^T \pi K(T - t) F v(t) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \xi[T, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] + \int_0^T \tilde{w}(T-t) dt - \int_0^{T^*} R^1(T, T-t, \lambda, v(t), \alpha) \pi K(T-t) D w(T-t, v(t)) dt - \\
&\quad - \int_0^T \sqrt{\alpha \|v(t)\|^2} \pi K(T-t) D \tilde{w}(T-t, v(t)) dt + \int_0^T \pi K(T-t) F v(t) dt = \\
&= \xi[T, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] + \int_0^T \tilde{w}(T-t) dt - \int_0^{T^*} [\lambda(T, T-t, v(t), \varphi(\cdot)) \eta[T, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] + \\
&\quad + \pi K(T-t) F v(t) + \tilde{w}(T-t)] dt - \int_0^{T^*} [\pi K(T-t) F v(t) + \tilde{w}(T-t)] dt + \\
&\quad + \int_0^T \pi K(T-t) F v(t) dt = \xi[T, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] + \int_0^T \tilde{w}(T-t) dt - \\
&\quad - \int_0^{T^*} \lambda(T, T-t, v(t), \varphi(\cdot)) \eta[T, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] dt - \int_0^{T^*} \pi K(T-t) F v(t) dt - \int_0^{T^*} \tilde{w}(T-t) dt - \\
&\quad - \int_0^T \pi K(T-t) F v(t) dt - \int_0^{T^*} \tilde{w}(T-t) dt + \int_0^T \pi K(T-t) F v(t) dt = \\
&= \xi[T, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] - \int_0^{T^*} \lambda(T, T-t, v(t), \varphi(\cdot)) \eta[T, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] dt = \\
&= [\xi[T, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] - \int_0^{T^*} \lambda(T, T-t, v(t), \varphi(\cdot)) dt] \eta[T, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, игра (1), (3) из начального положения $\varphi(\cdot)$ завершается за конечный момент времени T , что и доказывает первую часть теоремы.

Аналогично рассматривается случай, когда $\xi[T, \varphi(\cdot), \tilde{w}(\cdot)] = 0$. В этом случае управление преследователя на интервале $[0, T]$ имеет вид

$$u(t) = \sqrt{\alpha \|v(t)\|^2} \tilde{w}(T-t, v(t)). \quad (14)$$

Покажем, что в этом случае с помощью управления (14) игра (1) из точки $\varphi(\cdot)$ также завершается за время T (для любого допустимого управления $v(t)$) и управление $u(t)$ удовлетворяет интегральному ограничению (3). Точно такой же, как выше прибавляя и вычитая величину

$$\int_0^T \tilde{w}(T-t) dt,$$

получаем

$$\pi z(T) = \left[\pi K(T) - \sum_{i=0}^m \pi K(T-h_i) B_i \right] \varphi(0) + \sum_{i=0}^m \int_{h_i}^0 \pi K(T-t-h_i) [B_i \dot{\varphi}(t) + C_i \varphi(t)] dt -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \tilde{w}(T-t) dt + \int_0^T \tilde{w}(T-t) dt - \int_0^T \pi K(T-t) [Du(t, v(t)) - Fv(t)] dt = \\
& = \int_0^T \tilde{w}(T-t) dt - \int_0^T \sqrt{\alpha \|v(t)\|^2} \pi K(T-t) D\tilde{w}(T-t, v(t)) dt + \int_0^T \pi K(T-t) Fv(t) dt = \\
& = \int_0^T \tilde{w}(T-t) dt - \int_0^T [\pi K(T-t) Fv(t) + \tilde{w}(T-t)] dt + \int_0^T \pi K(T-t) Fv(t) dt = \\
& = \int_0^T \tilde{w}(T-t) dt - \int_0^T \pi K(T-t) Fv(t) dt - \int_0^T \tilde{w}(T-t) dt + \int_0^T \pi K(T-t) Fv(t) dt = 0.
\end{aligned}$$

Покажем, что выбранное управление (14) удовлетворяет неравенству (3). Имеем

$$\int_0^T \|u(t)\|^2 dt = \alpha \int_0^T \|v(t)\|^2 \|\tilde{w}(T-t, v(t))\|^2 dt \leq \alpha < 1.$$

Таким образом, игра (1), (3) из начальной точки $\varphi(\cdot)$ при указанном выше способе управления $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ (см. (14)), завершается за конечное время T . Теорема 2.1 доказана полностью.

Заключение

В данной работе исследуется задача преследования для динамических систем, описываемых линейными дифференциально-разностными уравнениями нейтрального типа. Рассматривается случай, когда на функции управления игроков наложены интегральные ограничения. В ходе исследования с использованием метода разрешающих функций разработан алгоритм построения контруправления для преследующего игрока, примененного против произвольных действий убегающего, и применен к задачам данного сложного класса. В результате были получены новые достаточные условия, позволяющие завершить процесс преследования на гарантированном интервале времени.

Литература

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М.: Наука, Т.2, 1988.
2. Сатимов Н.Ю. Методы решения задачи преследования в теории дифференциальных игр. Ташкент: Нац. библиот. Узбекистана имени Алишера Навои, 2019.
3. Мамадалиев Н. Об одной задаче преследования с интегральными ограничениями на управления игроков // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56. № 1. С. 129–148.

DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446615010115>

4. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992. 384 с.
5. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 290–301.
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0081543810060076>
6. Мамадалиев Н.А., Мустапокулов Х.Я., Абдуалимова Г.М. Метод разрешающих функций для решения задачи преследования при интегральных ограничениях на управления // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 1. С. 103–118. <https://doi.org/10.35634/vm230107>
7. Саматов Б.А. Метод разрешающих функций для решения задачи преследования при интегральных ограничениях на управления // Международный научно-технический журнал "Проблемы управления и информатики". Киев, 2013. № 4. С. 16–32.
8. Мамадалиев Н.А. Задача преследования для линейных игр с интегральными ограничениями на управления игроков // Известия вузов. Математика. 2020. № 3. С. 12–28. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-3-12-28>
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
10. Мамадалиев Н.А., Ибайдуллаев Т.Т. Модификация третьего метода преследования для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Известия вузов. Математика. 2021. № 11. С. 21–33.
<https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-11-21-33>