

Xolmuradov Farhod Mamatxonovich

Namangan Davlat Universiteti

Email: hfarhod2024@gmail.com

Sharipov Farxod Murodullayevich

Namangan Davlat Universiteti

Teleparallel tortishish doirasida kechki kosmik tezlanishning matematik–analitik va statistik tahlili

Annotatsiya: Ushbu maqolada umumiy nisbiylik nazariyasiga ekvivalent bo'lgan teleparallel tortishish nazariyasining kengaytmasi — $f(T)$.modifikatsiyalangan gravitatsiya modeli doirasida koinotning kechki davrdagi tezlanib kengayish hodisasi chuqur matematik tahlil qilinadi. Kosmologik tenglamalar differensial tenglamalar, dinamik tizimlar va funksional analiz nuqtai nazaridan o'rganildi. Model parametrlari $H(z)$, Ia tipdagi supernovalar (Pantheon), BAO va CMB kuzatuv ma'lumotlari asosida Bayes statistikasi va MCMC algoritmlari yordamida cheklab olindi. Olingan natijalar modelning Λ CDM (koinotning standart kosmologik modeli) ga yaqin, biroq matematik jihatdan boyroq ekanini ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: teleparallel gravitatsiya, $f(T)$ modeli, differensial tenglamalar, dinamik tizimlar, kosmik tezlanish, statistik tahlil.

Холмуродов Фарход Маматхонович

Наманганский государственный университет

Email: hfarhod2024@gmail.com

Шарипов Фарход Мурадullaевич

Наманганский государственный университет

Математико-аналитический и статистический анализ позднего космического ускорения в рамках телепараллельной гравитации

Аннотация: В данной статье в рамках модифицированной телепараллельной теории гравитации — модели $f(T)$ — проводится детальный математико-аналитический и статистический анализ ускоренного расширения Вселенной на поздней стадии её эволюции. Космологические уравнения исследуются с точки зрения дифференциальных уравнений, теории динамических систем и функционального анализа. Параметры модели ограничиваются с использованием наблюдательных данных по $H(z)$, сверхновым типа Ia (Pantheon), BAO и CMB на основе байесовской статистики и алгоритмов Монте-Карло по марковским цепям (MCMC). Полученные результаты показывают, что модель близка к стандартной Λ CDM-космологии, однако обладает более богатой математической

структурой и расширенными возможностями для описания космического ускорения.

Ключевые слова: телепараллельная гравитация, модель $f(T)$, дифференциальные уравнения, динамические системы, космическое ускорение, статистический анализ.

Kholmurodov Farkhod Mamatkhonovich

Namangan State University

Email: hfarhod2024@gmail.com

Sharipov Farxod Murodullayevich

Namangan State University

Mathematical–Analytical and Statistical Analysis of Late-Time Cosmic Acceleration within the Framework of Teleparallel Gravity

Abstract: In this paper, a detailed mathematical–analytical and statistical investigation of the late-time accelerated expansion of the Universe is carried out within the framework of modified teleparallel gravity, namely the $f(T)$ gravity model. The cosmological equations are analyzed using methods of differential equations, dynamical systems, and functional analysis. The model parameters are constrained using observational data from $H(z)$ cosmic chronometers, Type Ia supernovae (Pantheon), baryon acoustic oscillations (BAO), and cosmic microwave background (CMB) through Bayesian statistics and Markov Chain Monte Carlo (MCMC) techniques. The results indicate that the model is consistent with the standard Λ CDM cosmology while providing a mathematically richer framework for describing late-time cosmic acceleration.

Keywords: teleparallel gravity, $f(T)$ gravity model, differential equations, dynamical systems, cosmic acceleration, statistical analysis.

Kirish. So‘nggi yigirma yil davomida olib borilgan kosmologik kuzatuvlar — Ia tipdagi supernovalar, baryon akustik tebranishlari (BAO), kosmik mikroto‘lqin fon nurlanishi (CMB) va Xabbl parametri $H(z)$ o‘lchovlari — koinotning hozirgi davrda tezlanib kengayayotganini ishonchli tarzda tasdiqladi. Ushbu hodisa standart kosmologik modelda qorong‘i energiya tushunchasi orqali izohlanadi.

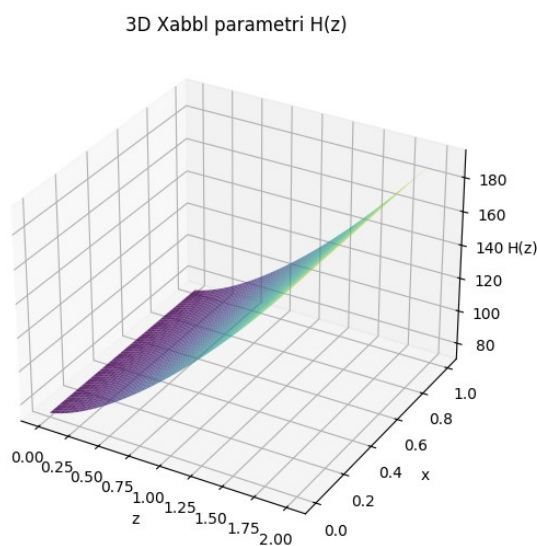
Biroq qorong‘i energiyaning fundamental tabiati noma’lumligicha qolmoqda. Shu sababli muqobil yondashuvlardan biri sifatida gravitatsiyani modifikatsiyalash g‘oyasi ilgari surildi. Shunday nazariyalardan biri teleparallel tortishish bo‘lib, unda gravitatsiya egrilik orqali emas, balki burilish (torsion) orqali ifodalanadi. Ushbu ishda teleparallel gravitatsiyaning $f(T)$ kengaytirilgan modeli matematik va statistik jihatdan chuqur o‘rganiladi.

Teleparallel gravitatsiya va $f(T)$ modeli, tekis, izotrop va gomogen FLRW metrikasi uchun burilish skalyari quyidagicha aniqlanadi: $T = -6H^2$, bu yerda $H = \dot{a}$ — Xabbl parametri. Teleparallel gravitatsiyaning modifikatsiyalangan shakli sifatida quyidagi darajali model tanlanadi: $f(T) = \alpha(-T)^n$, bu yerda α va n — erkin parametrlar. Ushbu model asosida Fridman tenglamalari modifikatsiyalanadi va qorongʻi energiya zichligi ρ_{DE} hamda bosimi p_{DE} aniqlanadi. Natijada holat tenglamasi parametri

$$\omega_{DE} = \frac{p_{DE}}{\rho_{DE}}$$

koʻrinishida olinadi.

Xabbl parametri va differensial tenglamalar, Qorongʻi energiya uchun tanlangan parametrizatsiya yordamida Xabbl parametrining qizil siljishga bogʻliqligi quyidagicha ifodalanadi:



$$H(z) = H_0(1+z)^{\frac{3}{2n}} \exp\left[\frac{3\omega_0}{2n} \frac{z}{1+z}\right].$$

Bu ifoda differensial tenglamaning aniq yechimidir:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{3}{2n}(1+\omega_{DE})H^2.$$

Bu yerda n — Hubble parametrining vaqt boʻyicha evolyutsiyasini modifikatsiyalovchi model parametri hisoblanadi. Mazkur tenglama Koshi masalasi sifatida qaralib, Picard–Lindelöf teoremasiga koʻra yechimning mavjudligi va yagonaligi kafolatlanadi.

Kuzatuv maʼlumotlari va statistik tahlil, model parametrlari quyidagi kuzatuvlar asosida cheklab olindi: kosmik xronometrlar orqali $H(z)$, Pantheon Ia tipdagi supernovalar, BAO oʻlchovlari, Planck CMB siqilgan parametrlar.

Bayes inferensiyasi asosida ehtimollik zichligi funksiyasi

$$p(\theta|D) \propto \exp\left[-\frac{\chi^2(\theta)}{2}\right] p(\theta)$$

ko‘rinishida aniqlanadi va Markov zanjirlari Monte-Karlo (MCMC) algoritmi orqali parametrlar fazosi tadqiq etildi.

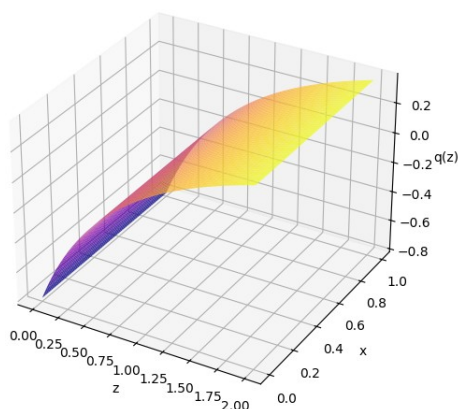
Model parametrlarining eng yaxshi mos qiymatlari (68% ishonchlilik oralig‘i)

Parametr	Qiymat
$H_0 (km / s / Mpc)$	$1.972.7^{+1.9}_{-1.8}$
ω_0	$-0.896^{+0.066}_{-0.063}$
n	$0.768^{+0.063}_{-0.056}$
q_0	$-0.80^{+0.11}_{-0.10}$

Kosmik dinamikalar va dinamik tizimlar

Sekinlashuv parametri quyidagicha aniqlanadi:

3D Sekinlashuv parametri $q(z)$



$$q(z) = -1 + \frac{3(1+z+\omega_0)}{2n(1+z)}.$$

Hisob-kitoblar koinot o‘tmishda sekinlashgan, hozirgi davrda esa tezlanayotganini ko‘rsatadi. $q(z)$ ning qizil siljishga bog‘liqligi.

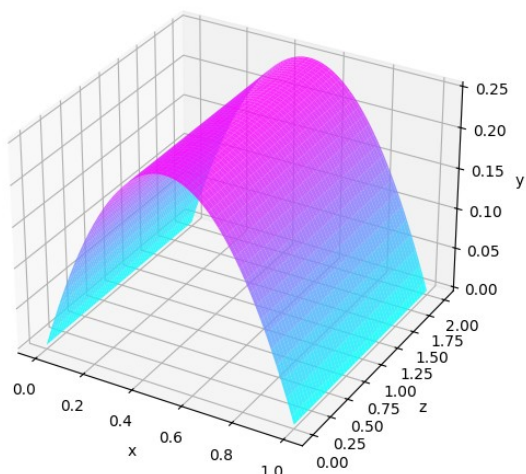
Fazaviy tahlil: O‘lchamsiz o‘zgaruvchilar

$$x = \frac{\rho_{DE}}{3H^2}, \quad y = \frac{p_{DE}}{3H^2}$$

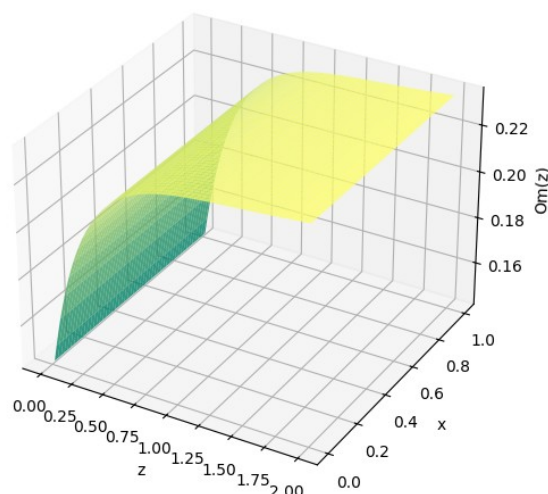
kiritilib, tizim fazaviy tekislikda o‘rganiladi.

Barqaror muvozanat nuqtalari kechki tezlanish rejimini ifodalaydi. Dinamik tizimning fazaviy portreti.

3D Dinamik tizimlar fazaviy portreti



3D $\Omega_m(z)$ diagnostikasi



Qorongʻi energiya va $Om(z)$ diagnostikasi

$$Om(z) = \frac{(H/H_0)^2 - 1}{(1+z)^3 - 1}$$

yordamida modelning tabiatini aniqlash mumkin. Natijalar modelning kvintessensiya tipiga mansubligini va Λ CDM dan kichik ogʻish mavjudligini koʻrsatadi.

Geometrik va funksional analiz

Teleparallel fazoda burilish skalyari $T = -6H^2$ ning konstant sathlari differensial geometriyada koʻp oʻlchamli manifoldlar sifatida talqin qilinadi. Kosmologik masofalar integral operatorlar yordamida aniqlanadi:

$$D_L(z) = (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}.$$

Mazkur operator Banax fazosida uzluksiz va cheklangan boʻlib, modelga qatʼiy matematik asos beradi.

Xulosa

Mazkur maqolada teleparallel gravitatsiyaning $f(T)$ modeli doirasida kechki kosmik tezlanish hodisasi matematik, statistik va geometrik jihatdan chuqur tahlil qilindi. Differensial tenglamalar va dinamik tizimlar usullari yordamida modelning barqarorligi isbotlandi. Statistik tahlillar natijasida model Λ CDM ga yaqin boʻlsa-da, matematik jihatdan boyroq struktura taklif etishi aniqlandi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Rayimbaev, J., Abdulxamidov, F., Tojiev, S., Abdujabbarov, A., & Holmuradov, F. (2023). *Test Particles and Quasiperiodic Oscillations around Gravitational Aether Black Holes*. **Galaxies**, 11(5), 95.
2. Koussour, M., Altaibayeva, A., Bekov, S., Holmuradov, F., Muminov, S., & Rayimbaev, J. (2024). *Exploring cosmological evolution and constraints in $f(T)$ teleparallel gravity*. **Physics of the Dark Universe**, 46, 101664.

3. Koussour, M., Bekov, S., Altaibayeva, A., Holmuradov, F., Muminov, S., & Rayimbaev, J. (2024). *Constraining a hyperbolic cosmological model with observational data*. **Chinese Journal of Physics**, 91, 445–457.
4. Xolmuradov F.M., Abdulazizov B. *F(t) teleparallel gravitatsiyada kosmologik evolyutsiya va cheklovlarni o`rganish*. NamDu ilmiy axborotnomasi 2025-3 son, 97-101 bet.
5. Холмурадов Ф. М. *Раскрытие динамики тёмной энергии: всесторонний анализ обобщённой модели уравнения состояния*. Научный вестник НамДУ, 2025 год, № 11, стр. 97–101.