

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Хуррамов Носир Хамидович, Термезский университет экономики и сервиса

Олтиев Бахриддин Жураевич, Термезский педагогический институт

Tel: +998 93 637 85 85,

E-mail: nxurramov22@mail.ru

Tel: +998 97 530 06 07,

E-mail: oltiyevbaxriddin@gmail.com

Annotatsiya: Данная статья посвящена постановке и исследованию задачи с условиями Геллерстедта на граничной характеристике и на параллельной ей внутренней характеристике.

Ключевые слова: параллельные характеристики, формула Дарбу, принцип экстремума, единственность решения, сингулярное интегральное уравнение, существование решения, метод Карлемана-Векуа, уравнение Винера-Хопфа, индекс.

ARALASH TIPDAGI TENGLAMANING BIR SINFI UCHUN PARALLEL XARAKTERISTIKALARDA ГЕЛЛЕРСТЕДТ MASALASINING YECHILUVCHANLIGI

Annotatsiya: Ushbu maqola chegaraviy xarakteristikada va unga parallel bo'lgan ichki xarakteristikada Gellerstedt shartlari qo'yilgan masalani o'rganishga bag'ishlangan.

Kalit so'zlar: parallel xarakteristikalar, Darbu formulasi, ekstremum prinsipi, yechimning yagonaligi, singular integral tenglama, yechimning mavjudligi, Karleman-Vekua usuli, Viner-Xopf tenglamasi, indeks.

SOLVABILITY OF THE GELLERSTEDT PROBLEM FOR A CLASS OF MIXED-TYPE EQUATIONS WITH PARALLEL CHARACTERISTICS

Annotation: This article is devoted to the formulation and study of a problem with Gellerstedt conditions on the boundary characteristic and on the internal characteristic parallel to it.

Keywords: parallel characteristics, Darboux formula, extremum principle, uniqueness of solution, singular integral equation, existence of solution, Carleman-Vekua method, Wiener-Hopf equation, index.

Постановка задачи TG_0 .

Пусть D - конечная односвязная область плоскости xOy , ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2} = 1$, с концами в точках $A(-1,0)$ и $B(1,0)$ а при $y < 0$ - характеристиками AC и BC уравнения

$$(\text{sign } y) |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

(1)

где m положительная постоянная.

Обозначим через D^+ и D^- части области, D , лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1 точку пересечения характеристик AC и BC с характеристиками уравнения (1), выходящих из точки, $E(c,0)$ где c - некоторое число, принадлежащее интервалу $I = (-1,1)$ оси $y = 0$.

С. Геллерстедта [1, с.186, с.201] для уравнения (1) Ф.Трикоми исследовал задачи, при постановке которых в гиперболической части области D значения искомого решения задаются на двух кусках характеристик разного семейства EC_0 и EC_1 или AC_0 и BC_1 . При этом в эллиптической части области D граничные значения задаются на нормальной кривой σ_0 .

Задача, рассматриваемая в настоящей работе, отличается от задачи Геллерстедта тем, что для неё значения искомого решения задаются на характеристиках одного семейства, т.е. на граничной характеристике AC_0 и параллельной ей внутренней характеристике EC_1 .

Задача TG_0 . Требуется найти в области D функцию $u(x,y) \in C(\bar{D})$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $u(x,y)$ принадлежит классу $C^2(D^+)$ и в области D^+ удовлетворяет уравнению (1.1.1);
- 2) $u(x,y)$ является в области D^- обобщённым решением класса R_1 [1, с.104];
- 3) на интервале вырождения AB имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in I \setminus \{c\}, \quad (2)$$

причём эти пределы при $x \rightarrow \pm 1$, $x \rightarrow c$ могут иметь особенность порядка ниже единицы;

4) для любых $x \in \bar{I}$ выполняются условия

$$u(x, y)|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in [-1, 1]; \quad (3)$$

$$u(x, y)|_{AC_0} = \psi'_0(x), \quad x \in [-1, (c-1)/2]; \quad (4)$$

$$u(x, y)|_{EC_1} = \psi'_1(x), \quad x \in [c, (c+1)/2], \quad (5)$$

где $\varphi(x)$, $\psi'_0(x)$, $\psi'_1(x)$ - заданные функции, причём

$$\varphi(x) \in C[-1, 1] \cap C^{0, \alpha_0}(-1, 1), \quad \psi'_0(x) \in C[-1, (c-1)/2] \cap C^{1, \alpha_0}(-1, (c-1)/2),$$

$$\psi'_1(x) \in C[(c+1)/2, 1] \cap C^{1, \alpha_0}((c+1)/2, 1), \quad \alpha_0 \in (0, 1),$$

$$\varphi(x) = (1-x^2)\bar{\varphi}(x), \quad \text{где } \bar{\varphi}(x) \in C^{0, \alpha_0}[-1, 1] \cap C^{0, \alpha_0}(-1, 1), \quad \psi'_0(-1) = 0, \quad \psi'_1(c) = 0.$$

Заметим, что условие (3) является условием Дирихле, заданным на кривой σ_0 , а условия (4) и (5) - это соответственно условия Геллерстедта заданное на граничной характеристике AC_0 , и на внутренней характеристике EC_1 . При $c = -1$ или $c = 1$ из задачи TG_0 следует задача Трикоми [1, с.128].

2. Единственность решения задачи TG_0 . Из формулы Дарбу, дающая в области D^- для уравнения (1) решение задачи Коши с начальными данными

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \in \bar{I}; \quad \lim_{y \rightarrow -0} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \quad x \in I,$$

из краевых условий (4) и (5) получим

$$\nu(x) = y D_{-1, x}^{1-2\beta} \tau(x) + \bar{\psi}'_0(x), \quad x \in (-1, c), \quad (6)$$

и

$$\nu(x) = y D_{c, x}^{1-2\beta} \tau(x) + \bar{\psi}'_1(x), \quad x \in (c, 1), \quad (7)$$

где, $D_{-1,x}^{1-2\beta}$ и $D_{c,x}^{1-2\beta}$ - операторы дифференцирования дробного соответственно

порядка[5],

$$\psi_0(x) = \frac{(2/(m+2))^{1-2\beta}}{y_2 \Gamma(1-\beta)} (1+x)^\beta D_{-1,x}^{1-\beta} \psi_0 \left(\frac{x-1}{2} \right),$$

$$\psi_1(x) = \frac{(2/(m+2))^{1-2\beta}}{y_2 \Gamma(1-\beta)} (x-c)^\beta D_{c,x}^{1-\beta} \psi_1 \left(\frac{x+c}{2} \right),$$

$$y = 2\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)((m+2)/4)^{2\beta} / \Gamma(1-2\beta)\Gamma(\beta) \quad y_1 = \frac{2^{1-2\beta} \Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)},$$

$$y_2 = - \frac{2^{2\beta-1} \Gamma(2-2\beta)}{(1-\beta_0) \Gamma^2(1-\beta)}.$$

Равенства (6) и (7) являются первыми функциональными соотношениями между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесёнными соответственно на интервалы $(-1, c)$ и $(c, 1)$ оси $y=0$ из области D^-

Для задачи TG_0 аналогом принципа экстремума А.В.Бицадзе [6, с.301] является

Теорема 1.1 Решение $u(x, y)$ задачи TG_0 при выполнении условий $\psi'_0(x) \equiv 0$, $\psi'_1(x) \equiv 0$ своего наибольшего положительного значения (НПЗ) или наименьшего отрицательного значения (НОЗ) в замкнутой области $\bar{D}^+$ может принимать только в точках нормальной кривой σ_0 .

Доказательство теоремы проводится методом работы два [2]:

3. Существование решения задачи TG_0

Теорема 1.2 Задача TG_0 однозначно разрешима.

Хорошо известное соотношение между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесённое на I из области D^+ [4, с.113]

$$\tau(x) = -k_1 \int_{-1}^1 \left[|x-t|^{-2\beta} - (1-xt)^{-2\beta} \right] \nu(t) dt + \Phi(x), \quad x \in \bar{I},$$

где

$$\Phi(x) = 2\beta k_1 ((m+2)/2)^{2\beta} (1-x^2) \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\beta-1/2} (1-2xt+x^2)^{-1-\beta} \varphi(t) dt \in C(\bar{I}) \cap C^1(I).$$

Отметим, что соотношения (8) справедлива для всего промежутка $x \in \bar{I}$.

Применяя, операторы $D_{-1,x}^{1-2\beta}$ и $D_{c,x}^{1-2\beta}$ к соотношению (8), стандартными вычислениями и выделив интегралы с сингулярной особенностью получаем следующее систему уравнений относительно неизвестных функций $v_0(x)$ и $v_1(x)$.

$$\begin{aligned} v_0(x) + \lambda \int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1-(ax-b)(at-b)} \right) v_0(t) dt = \\ = -\lambda \int_{-1}^1 \frac{bv_1(t) dt}{bt-ax+1} + T_0[v_1] + F_0(x), \quad x \in I, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} v_1(x) + \lambda \int_{-1}^1 \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right) v_1(t) dt = \\ = \lambda \int_{-1}^1 \left(\frac{a(1-t)}{b(1+x)} \right)^{1-2\beta} \frac{av_0(t) dt}{at-bx-1} + G_0[v_0] + S_0[v_1] + F_1(x), \quad x \in I, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{где } v_0(x) = v(ax-b), \quad v_1(x) = v(bx+a), \quad \lambda = \frac{\cos(\beta\pi)}{\pi(1+\sin(\beta\pi))},$$

$$\gamma = \frac{2\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-2\beta)\Gamma(\beta)} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{2\beta}$$

$T_0[v_1]$, $G_0[v_0]$, $S_0[v_1]$ - регулярные операторы, $F_0(x)$, $F_1(x)$ - известные функции.

Таким образом, задача TG_0 равносильным образом сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений (9) и (10).

Заметим, что уравнения (9) и (10) являются неклассическими сингулярными интегральными уравнениями Трикоми, так как они имеют две особенности:

1) "несингулярные" части ядер уравнений имеют некарлемановские сдвиги $ax-b$ и $at-b$ в (9) и $bx+a$ и $bt+a$ в (10);

2) интегральные операторы правых частей уравнений (9) и (10) не являются регулярными, поскольку при $x=1, t=-1$ в (9) и при $x=-1, t=1$ в (10) ядра этих

операторов имеют изолированные особенности первого порядка (и поэтому они выделены отдельно) [7,8].

Временно считая правые части уравнений (9) и (10) известными функциями, запишем их в виде

$$v_0(x) + \lambda \int_1^1 \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1-(ax-b)(at-b)} \right) v_0(t) dt = g_0(x), \quad x \in I, \quad (11)$$

$$v_1(x) + \lambda \int_1^1 \left(\frac{1+t}{1+x} \right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)} \right) v_1(t) dt = g_1(x), \quad x \in I, \quad (12)$$

где

$$g_0(x) = -\lambda \int_1^1 \frac{bv_1(t)dt}{bt-ax+1} + T_0[v_1] + F_0(x), \quad (13)$$

$$g_1(x) = \lambda \int_1^1 \left(\frac{a(1-t)}{b(1+x)} \right)^{1-2\beta} \frac{av_0(t)dt}{at-bx-1} + G_0[v_0] + S_0[v_1] + F_1(x). \quad (14)$$

Применяя к каждому уравнению (11) и (12) метод регуляризации Карлемана, развитой С.Г. Михлиным [9,10], соответственно получим решения

$$v_0(x) = -\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{b(1+s)}{a(1+x)} \right)^{\alpha} \frac{bv_1(s)ds}{bs-ax+1} + T_2[v_1] + \tilde{g}_0(x), \quad x \in I, \quad (15)$$

$$v_1(x) = -\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{a(1-s)}{b(1+x)} \right)^{3\alpha} \frac{av_0(s)ds}{bx-as+1} + G_2[v_0] + S_1[v_1] + \tilde{g}_1(x), \quad x \in I, \quad (16)$$

Теперь в (15) x заменив на $-x$, а в (16) сделав замену переменного интегрирования $s = -t$ и введя обозначение $\tilde{v}_0(x) = v_0(-x)$ соответственно получим

$$\tilde{v}_0(x) = -\int_{-1}^1 m \left(\frac{1+x}{1+s} \right) \frac{v_1(s)ds}{1+s} + T_3[v_1] + F_0(x), \quad (17)$$

$$v_1(x) = -\int_{-1}^1 n \left(\frac{1+x}{1+t} \right) \frac{\tilde{v}_0(t)dt}{1+t} + G_3[\tilde{v}_0] + S_3[v_1] + F_1(x), \quad (18)$$

где

$$m(y) = \frac{\delta(ay/b)^{-\alpha}}{(1+ay/b)}, \quad n(y) = \frac{\delta(by/a)^{-2\alpha}}{(1+by/a)}, \quad \delta = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}, \quad (19)$$

$T_3[v_1], G_3[\tilde{v}_1], S_3[v_1]$ - регулярные операторы, а $F_0(x), F_1(x)$ - известные функции.

Таким образом, уравнение (17) совместно с уравнением (18) составляют систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\tilde{v}_0(x)$ и $v_1(x)$ с сингулярной особенностью в ядре.

Характерной особенностью уравнения (17) является, то что оно разрешено относительно $\tilde{v}_0(x)$, что позволяет из (20) исключить $\tilde{v}_0(x)$. Выражение для $\tilde{v}_0(x)$ из (17) подставляя в (18), имеем [7,8]

$$v_1(x) = \int_{-1}^1 \frac{\Omega(x,t)v_1(t)dt}{1+t} + R[v_1], \quad (20)$$

где

$$\Omega(x,t) = \int_{-1}^1 n\left(\frac{1+x}{1+s}\right) m\left(\frac{1+s}{1+t}\right) \frac{ds}{1+s}, \quad (21)$$

$$R[v_1] = - \int_{-1}^1 n\left(\frac{1+x}{1+t}\right) \frac{T_3[v_1] + F_0(t)}{1+t} dt + \\ + G_3 \left[- \int_{-1}^1 m\left(\frac{1+x}{1+t}\right) \frac{v_1(t)dt}{1+t} + T_3[v_1] + F_0(x) \right] + S_3[v_1] + F_1(x) \\ \text{- регулярный оператор.}$$

В (21) сделав замену $r = (1+s)/(1+t)$, имеем

$$\Omega(x,t) = \int_0^{2/(1+t)} n\left(\frac{1+x}{r(1+t)}\right) m(r) \frac{dr}{r} = \Omega_1(x,t) - \Omega_2(x,t)$$

где

$$\Omega_1(x,t) = \int_0^\infty n\left(\frac{1+x}{r(1+t)}\right) m(r) \frac{dr}{r}, \quad (22)$$

$$\Omega_2(x,t) = \int_{2/(1+t)}^\infty n\left(\frac{1+x}{r(1+t)}\right) m(r) \frac{dr}{r}, \quad (23)$$

оценим сначала $\Omega_2(x,t)$ В силу (19) имеем

$$n\left(\frac{1+x}{r(1+t)}\right) \leq \delta \left(\frac{a(1+t)}{b(1+x)}\right)^{3\alpha} r^{3\alpha}, \quad m(r) \leq \delta \left(\frac{b}{a}\right)^{1+\alpha} r^{-1-\alpha}.$$

Согласно последним неравенствам из (23) получим

$$\Omega_2(x, t) \leq \frac{\delta^2}{1-2\alpha} \left(\frac{b}{2a} \right)^{1-2\alpha} \frac{(1+t)^{1+\alpha}}{(1+x)^{3\alpha}},$$

следовательно $\Omega_2(x, t) / (1+t)$ - регулярное ядро.

Таким образом, на основании последнего утверждения уравнение (20) преобразуем к виду

$$v_1(x) = \int_{-1}^1 \Omega_1(x, t) \frac{v_1(t) dt}{1+t} + R_2[v_1], \quad (24)$$

где $R_2[v_1] = R_1[v_1] - \int_{-1}^1 \frac{\Omega_2(x, t)}{1+t} v_1(t) dt$ - регулярный оператор.

Вычислим теперь интеграл (22)

$$\Omega_1(x, t) = \int_0^\infty n \left(\frac{1+x}{r(1+t)} \right) \frac{m(r)}{r} dr = \int_0^\infty n \left(\frac{y}{r} \right) \frac{m(r)}{r} dr,$$

где $y = (1+x)/(1+t)$. Отсюда в силу (19) получим, что

$$\Omega_1(x, t) = \delta^2 \left(\frac{a}{b} \right)^{2\alpha} y^{-3\alpha} ab \int_0^\infty \frac{r^{2\alpha} dr}{(by + ar)(b + ar)} = \frac{\delta^2 (a/b)^{2\alpha} a}{y^{3\alpha} (1-y)} \left(\int_0^\infty \frac{r^{2\alpha} dr}{by + ar} - \int_0^\infty \frac{r^{2\alpha} dr}{b + ar} \right)$$

Тогда, воспользовавшись интегралом Эйлера [11, с.161]

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

получаем

$$\Omega_1(x, t) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha\pi)}{2\pi} \frac{y^{-3\alpha} (y^{2\alpha} - 1)}{y - 1}, \quad y = \frac{1+x}{1+t}. \quad (25)$$

Поэтому вследствие представления (25) уравнение (24) запишется в виде

$$\psi(x) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha\pi)}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\left[(1+x)/(1+t) \right]^{2\alpha} - 1}{(1+x)/(1+t) - 1} \frac{\psi(t)}{1+t} dt + R_3[\psi], \quad (26)$$

где

$$\psi(x) = (1+x)^{3\alpha} v_1(x), \quad R_3[\psi] = (1+x)^{3\alpha} R_2[(1+x)^{-3\alpha} \psi(x)].$$

В уравнении (26) сделаем замену переменных $1+t = 2\exp(-s)$, $1+x = 2\exp(-y)$ и

введём обозначения $\rho(y) = \psi(2\exp(-y) - 1) \exp((2\alpha - 1)y/2)$, $2\alpha - 1 < 0$,

$$K_0(x) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha\pi)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sh}(\alpha x)}{\operatorname{sh}(x/2)}.$$

Тогда уравнение (26) запишется в виде [7,8]

$$\rho(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty K_0(y-s) \rho(s) ds + R_4[\rho]. \quad (27)$$

Уравнение (27) является интегральным уравнением Винера-Хопфа [12, с.55].

Функция $K(x)$ имеет показательный порядок убывания на бесконечности причём $K_0(x) \in C[0, \infty]$. Следовательно, [12, с.12]

$$K_0(x) \in L_2 \cap H_\alpha = \{0\}.$$

Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений типа свёртки применимы лишь в одном частном случае, когда индекс этих уравнений равен нулю [12, с.46].

Индекс χ уравнения (27) совпадает с индексом выражения $1 - K^*(x)$, взятым с обратным знаком, т.е. $\chi = -\operatorname{Ind}(1 - K^*(x))$ [12, с.56] где

$$K^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-ixt} K_0(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty (\cos(xt) - i \sin(xt)) K_0(t) dt.$$

С учётом четности функции $K_0(x)$ и формулы [13, с.518]

$$\int_0^\infty \cos(\alpha t) \frac{\operatorname{sh}(\beta t)}{\operatorname{sh}(\gamma t)} dt = \frac{\pi}{2\gamma} \frac{\sin(\beta\pi/\gamma)}{\operatorname{ch}(\alpha\pi/\gamma) + \cos(\beta\pi/\gamma)}$$

нетрудно убедиться в том, что

$$K^*(x) = \frac{2\sin^2(\alpha\pi)}{\operatorname{ch}(2\pi x) + \cos(2\alpha\pi)} < \frac{1}{\operatorname{ch}(2\pi x) + \cos(2\alpha\pi)} < 1.$$

Так как $\max K^*(x) < 1$ то $\chi = -\operatorname{Ind}(1 - K^*(x)) = 0$.

Следовательно, уравнение (27) однозначно редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода [12, с.46], однозначная разрешимость которого следует из единственности решения задачи TG_0 . Отсюда следует однозначна разрешимость задачи TG_0 . Теорема 2 доказана.

Литература

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.:Высшая школа.1985.-304 с.

2. Мирсабуров М., Бегалиев О., Хуррамов Н. Об одном обобщении задачи Трикоми // Дифференциальные уравнения. 2019, том 55 №8, С.1117-1126.
3. Хуррамов Н.Х. Об одном обобщении задачи Трикоми для одного класса уравнений смешанного типа // Бюллетень Института математики 2020, №3, стр.183-198.
4. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент 2005. "Universitet", "Yangiyo'l poligraf servis" 224 с.
5. Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. // Дифференц. уравнения. 1969, т 5, №1. с. 44-59.
6. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981. 448 с.
7. Полосин А.А. Об однозначной разрешимости задачи Трикоми для специальной области. // Дифференц. уравнения. 1996. т.32. №3. с.394-401.
8. Мирсабуров М. Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе-Самарского на параллельных характеристиках. // Дифференц. уравнения. 2001, т.37, № 9. с. 1281-1284.
9. Михлин С.Г. Об интегральном уравнении F.Trikomi. // ДАН СССР. 1948. т.59, №6, с.1053-1056.
10. Мирсабуров М. Задача с аналогами условия Франкля на характеристике и на отрезке вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами. // Дифференц. уравнения. 2017. т.53. №6. с.778-788.
11. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. т.2. М.: Наука 1968.
12. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М., 1978.
13. Градштейн Н.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М. 1971.