

Karimov Kamoliddin To'ychiboyevich

Farg'ona davlat universiteti dotsenti

E-mail: karimovk80@mail.ru

Tel: +998911086240

Axmadjonova Nodiraxon Murodiljon qizi

Farg'ona davlat universiteti magistranti

E-mail: axmadjonovanodirabegim24@gmail.com

Tel: +998910402405

UO'K 517.956

**UCHINCHI TARTIBLI BITTA SINGULYAR KOEFFITSIYENTGA EGA
BO'LGAN DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY
MASALA**

Annotatsiya: Ushbu maqolada uchinchi tartibli bitta singulyar koefitsiyentga ega bo'lgan xususiy hosilali differensial tenglama uchun to'g'ri to'rtburchak sohada bir chegaraviy masala yechimining yagonaligi va mavjudligi haqidagi teoremlar isbotlangan.

Kalit so'zlar: Uchinchi tartibli differensial tenglama, singulyar koefitsiyent, karrali xarakteristikalar.

Каримов Камолиддин Туйчибоевич

Доцент Ферганского государственного университета

Ахмаджонова Нодирахон Муродилжон кизи

Магистрант Ферганского государственного университета

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ОДНИМ СИНГУЛЯРНЫМ
КОЭФФИЦИЕНТОМ**

Аннотация: В данной статье в прямоугольной области доказаны теоремы о единственности и существовании решения одной краевой задачи

для дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с одним сингулярным коэффициентом.

Ключевые слова: Дифференциальное уравнение третьего порядка, сингулярный коэффициент, кратные характеристики.

Karimov Kamoliddin Tuychiboevich

Associate Professor of Fergana State University

Axmadjonova Nodiraxon Murodiljon qizi

Master's student of Fergana State University

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A THIRD-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH ONE SINGULAR COEFFICIENT

Abstract: In this paper, theorems on the uniqueness and existence of a solution to a boundary value problem for a third-order partial differential equation with one singular coefficient in a rectangular domain are proved.

Keywords: Third-order differential equation, singular coefficient, multiple characteristics.

Kirish

Ma'lumki, yuqori tartibli singulyar koeffitsiyentli tenglamalar uchun chegaraviy masalalar nazariyasi zamonaviy differensial tenglamalar nazariyasining tez rivojlanayotgan bo'limlaridan biri hisoblanadi. Uchinchi tartibli singulyar koeffitsiyentli tenglamalar uchun qo'yilgan masalalar asosan simmetrik va maxsus xususiyatga ega bo'lgan (singulyar) o'tkazuvchan muhitlarda to'lqinlarning tarqalishi va muvozanat holatini o'rganish uchun xizmat qiladi. Dispersiv muhitda kichik, ammo chekli amplitudali to'lqinlarni o'rganish uchun ko'pincha model sifatida Kortevega-de Vries tenglamasidan foydalaniladi:

$$u_y + uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \beta = \text{const} \neq 0.$$

Chiziqli holatda bunday tenglamalar nazariyasini L.Cattabriga [1], T.D.Djurayev [2] va uning shogirdlari tomonidan o'rganilgan va rivojlantirilgan. Bu karrali xarakteristikali tenglamalarning boshqa sinflari bo'yicha tadqiqotlar

boshlanishiga turtki bo'ldi. Natijada vaqt bo'yicha ikkinchi tartibli hosilani o'z ichiga olgan karrali xarakteristikali tenglamalar ustida tadqiqotlar boshlandi va davom etmoqda. Karrali xarakteristikali uchinchi tartibli tenglama bo'yicha birinchi natijalar H.Blok, E.Del Vecchio ishlarida olingan. L.Catabriga ikki karrali xosmas integral ko'rinishida $D_x^{2n+1}u - D_y^2u = 0$ tenglama uchun fundamental yechimini qurgan, potentsial xossalarini o'rgangan va tegishli chegaraviy masalalarni yechish bilan shug'ullangan.

I. Masalaning qo'yilishi

Mazkur ishda $D = \{(x, y): 0 < x < p, 0 < y < q\}$ sohada ushbu

$$u_{xxx} - u_{yy} - \frac{2\beta}{y}u_y + \mu u = 0 \quad (1)$$

tenglamani qaraylik, bu yerda $p > 0$, $q > 0$, $0 < \beta < 1/2$, μ – doimiy haqiqiy son.

Ushbu (1) tenglama D sohada uchinchi tartibli xususiy hosilali, singulyar koeffitsiyentli, chiziqli, karrali xarakteristikaga ega tenglama hisoblanadi.

(1) tenglama uchun D sohada quyidagi masalani qo'yamiz va tadqiq qilamiz:

A_1 -masala. D sohada (1) tenglamaning

$$u(x, y) \in C_{x,y}^{3,2}(D), u_{xx}, y^{2\beta}u_y \in C(\overline{D})$$

sinfga tegishli bo'lgan hamda quyidagi

$$u(x, 0) = u(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p \quad (2)$$

$$u(0, y) = \psi_1(y), \quad u(p, y) = \psi_2(y), \quad u_x(p, y) = \psi_3(y), \quad 0 \leq y \leq q \quad (3)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topilsin, bu yerda $\psi_i(y)$, ($i=1,3$) – berilgan funksiyalar.

Agar A_1 -masalada $\beta = 0$ bo'lsa, [3] ishda o'rganilgan masala kelib chiqadi. Bu masalaga o'xshash masalar esa [4], [5] ishlarda o'rganilgan.

II. Masala yechimining yagonaligi

1-teorema. Agar A_1 masalaning yechimi mavjud bo'lib, $0 \leq \beta \leq 1/2$, $\mu \geq 0$ bo'lsa, u holda u yagonadir.

Isbot. Faraz qilaylik, A_1 masala ikkita $u_1(x, y)$ va $u_2(x, y)$ yechimlarga ega bo'lsin. U holda $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ funksiya bir jinsli A_1 -masalaning yechimi bo'ladi. $\overline{D}$ sohada $u(x, y) \equiv 0$ ekanligini isbotlaymiz.

(1) tenglamaning har ikkala tomonini $y^{2\beta}u(x, y)$ ga ko'paytiramiz. Natijada quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$y^{2\beta}uu_{xxx} - y^{2\beta}uu_{yy} - 2\beta y^{2\beta-1}uu_y + y^{2\beta}u^2 = 0.$$

Oxirgi ifodani quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$\frac{\partial}{\partial x} y^{2\beta} \left(uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right) - \frac{\partial}{\partial y} (y^{2\beta} uu_y) + y^{2\beta} u_y^2 + y^{2\beta} \mu u^2 = 0. \quad (4)$$

(4) ifodani D soha bo'yicha integrallaymiz va Grin formulasini [6] qo'llab, quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} & \int_0^q y^{2\beta} \left(u(p, y)u_{xx}(p, y) - \frac{1}{2} u_x^2(p, y) - u(0, y)u_{xx}(0, y) + \frac{1}{2} u_x^2(0, y) \right) dy - \\ & - \int_0^p y^{2\beta} u(x, y)u_y(x, y) \Big|_{y=0}^{y=q} dx + \iint_D y^{2\beta} u_y^2 dx dy + \iint_D y^{2\beta} \mu u^2 dx dy = 0. \end{aligned}$$

Bir jinsli chegaraviy shartlarni inobatga oladigan bo'lsak, quyidagi

$$\frac{1}{2} \int_0^q y^{2\beta} u_x^2(0, y) dy + \iint_D y^{2\beta} u_y^2(x, y) dx dy + \mu \iint_D y^{2\beta} u^2(x, y) dx dy = 0 \quad (5)$$

tenglikka ega bo'lamiz. (5) tenglikda agar

- $\mu = 0$ bo'lsa, $u_y(x, y) = 0$ bo'ladi. Bundan esa $u(x, y) = f(x)$ hosil bo'ladi. Bu yerdan $y = 0$ deb olsak, $u(x, 0) = 0$ chegaraviy shartga asosan $f(x) = 0$ bo'ladi. Demak, $u(x, y) \equiv 0, (x, y) \in \overline{D}$.
- $\mu > 0$ bo'lsa (5) ning uchinchi hadidan $u(x, y) \equiv 0, (x, y) \in \overline{D}$ kelib chiqadi.

Teorema isbotlandi.

III. Masala yechimining mavjudligi

2-teorema. Agar quyidagi $\psi_i(y) \in C^3[0, q]$, $i = \overline{1, 3}$, $\psi_i(q) = \psi_i(0) = 0$, $|\psi_i'''(0)| < \infty$ shartlar bajarilsa A_1 masala yechimga ega.

Isbot. A_1 masala yechimini quyidagi

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (6)$$

ko'rinishda qidiramiz.

(6) ni (1) tenglamaga qo'yamiz va $X(x)$, $Y(y)$ funksiyalarga nisbatan quyidagi $Y'' + \frac{2\beta}{y}Y' + \lambda^3 Y = 0$, $X''' + (\mu + \lambda^3)X = 0$ oddiy differensial tenglamalarni hosil qilamiz.

(2) shartni inobatga oladigan bo'lsak, quyidagi

$$Y''(y) + \frac{2\beta}{y}Y'(y) + \lambda^3 Y(y) = 0, \quad (7)$$

$$Y(0) = 0, Y(q) = 0 \quad (8)$$

spektral masalani hosil qilamiz, bu yerda λ^3 – ajratish koeffitsiyenti.

Endi $\{(7), (8)\}$ masalaning noldan farqli yechimi mavjud bo'ladigan λ parametrning qiymatlarini topish bilan shug'ullanamiz. Buning uchun λ parametrning uchta holini ko'rib chiqamiz.

Faraz qilaylik, $\lambda < 0$ bo'lsin. U holda (7) tenglamada

$$Y(y) = \left(\frac{t}{\sqrt{-\lambda^3}} \right)^{\frac{1}{2}-\beta} p(t), \quad t = \sqrt{-\lambda^3} y \text{ almashtirish bajaramiz va natijada quyidagi}$$

$$t^2 p''(t) + tp'(t) - (t^2 + \nu^2)p(t) = 0 \quad (9)$$

tenglamaga ega bo'lamiz, bu yerda $\nu = 1/2 - \beta$.

(9) tenglamaning umumiy yechimi $p(t) = c_1 I_\nu(t) + c_2 K_\nu(t)$ ko'rinishida ekanligi [7], [8] adabiyotlarda ko'rsatib o'tilgan, bu yerda c_1 va c_2 – ixtiyoriy o'zgarmaslar. $I_\nu(t)$ va $K_\nu(t)$ lar esa mos holda ν – tartibli Infeld va Makdonald funksiyalaridir.

Qilingan almashtirishdan foydalanib, Y o'zgaruvchiga qaytadigan bo'lsak (7) tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$Y(y) = c_1 y^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{-\lambda^3} y) + c_2 y^{1/2-\beta} K_{1/2-\beta}(\sqrt{-\lambda^3} y) \quad (10)$$

(10) yechimni (8) chegaraviy shartlarga bo'ysindiramiz va c_1 hamda c_2 ga nisbatan quyidagi

$$\begin{cases} c_1 0^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{-\lambda^3} 0) + c_2 y^{1/2-\beta} K_{1/2-\beta}(\sqrt{-\lambda^3} y) = 0, \\ c_1 q^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{-\lambda^3} q) + c_2 y^{1/2-\beta} K_{1/2-\beta}(\sqrt{-\lambda^3} q) = 0, \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemani yechib $Y(y) \equiv 0$ ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin. Demak, $\lambda < 0$ da {(7), (8)} masalaning noldan farqli yechimi mavjud emas.

$\lambda = 0$ da {(7), (8)} masala quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{cases} Y''(y) + \frac{2\beta}{y} Y'(y) = 0, \\ Y(0) = 0, Y(q) = 0. \end{cases}$$

Oxirgi tenglamaning umumiy yechimi $Y(y) = c_3 y^{1-2\beta} + c_4$, $c_3, c_4 = \text{const}$, ko'rinishida aniqlanadi. Bu funksiyani (8) shartlarga bo'ysundiramiz va $\lambda = 0$ da {(7), (8)} masalaning noldan farqli yechimi mavjud emasligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Faraz qilaylik $\lambda > 0$ bo'lsin. U holda $Y(y) = (t / \sqrt{\lambda^3})^{1/2-\beta} p(t)$, $t = \sqrt{\lambda^3} y$ almashtirish bajarish natijasida quyidagiga ega bo'lamiz:

$$t^2 p''(t) + t p'(t) + (t^2 - \nu^2) p(t) = 0, \quad (11)$$

bu yerda, $\nu = 1/2 - \beta$. (11) tenglamaning umumiy yechimidan va kiritilgan almashtirishlardan foydalanib (7) tenglamaning umumiy yechimi

$$Y(y) = c_5 y^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda^3} y) + c_6 y^{1/2-\beta} J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda^3} y), \quad c_5, c_6 = \text{const}$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $J_\nu(x)$ – ν indeksli birinchi tur Bessel funksiyasi.

Bu umumiy yechimni (8) shartlarga bo'ysundiramiz:

$$\begin{cases} c_5 y^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda^3} y) \Big|_{y=0} + c_6 y^{1/2-\beta} J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda^3} y) \Big|_{y=0} = 0, \\ c_5 q^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda^3} q) + c_6 q^{1/2-\beta} J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda^3} q) = 0. \end{cases}$$

Birinchi tenglikdan $c_6 = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Ikkinchi tenglikdan esa $J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda^3} q) = 0$ tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning musbat ildizlarini $\sqrt{\lambda^3} q = \sigma_n$ deb belgilab, λ -parametrning qiymatlarini, ya'ni masalaning xos qiymatlarini $\lambda_n = (\sigma_n / q)^{2/3}$, $n \in N$ ko'rinishida topamiz.

Bu xos qiymatlarga mos keluvchi $\{(7), (8)\}$ masalaning xos funksiyalari $Y_n(y) = c_5 y^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda^3} y)$ ko'rinishda aniqlanadi. Bu funksiyalar sistemasini normallashtirib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$Y_n(y) = \frac{\sqrt{2}}{q J_{3/2-\beta}(\sigma_n)} y^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}\left(\frac{\sigma_n y}{q}\right). \quad (12)$$

[8] adabiyotdagi ma'lumotlarga muvofiq (12) funksiyalar sistemasi $L_2[0, q]$ fazosida $y^{2\beta}$ vazn bilan to'la ortonormal sistemani tashkil qiladi.

Qo'yilgan masalaning x o'zgaruvchiga mos keladigan qismi [4] ishda o'rganilgan. 2-teoremaning va bu tadqiqotning natijasi hamda (12) formulaga asosan A_1 -masalaning yechimi

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{1n} e^{-k_n x} + e^{\frac{1}{2} k_n x} \left(C_{2n} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x + C_{3n} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x \right) \right] \frac{\sqrt{2} y^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}\left(\frac{\sigma_n y}{q}\right)}{q J_{3/2-\beta}(\sigma_n)},$$

$$\text{ko'rinishda bo'ladi, bu yerda } C_{1n} = \frac{1}{\Delta} \left[A_{1n} \frac{\sqrt{3}}{2} k_n e^{k_n p} - A_{2n} \delta k_n e^{\frac{1}{2} k_n p} + A_{3n} \beta e^{\frac{1}{2} k_n p} \right],$$

$$C_{2n} = \frac{1}{\Delta} \left[-A_{1n} k_n e^{-\frac{1}{2} k_n p} (\delta + \beta) + A_{2n} \delta k_n e^{\frac{1}{2} k_n p} - A_{3n} \beta e^{\frac{1}{2} k_n p} \right],$$

$$C_{3n} = \frac{1}{\Delta} \left[A_{1n} k_n (\alpha + \gamma) e^{-\frac{1}{2} k_n p} + A_{2n} k_n \left(e^{-k_n p} + \gamma e^{\frac{1}{2} k_n p} \right) + A_{3n} \left(\alpha e^{\frac{1}{2} k_n p} - e^{-k_n p} \right) \right],$$

$$A_{in} = \sqrt{\frac{2}{q}} \int_0^q \psi_i(\eta) \sin \frac{\pi(2n-1)}{2q} \eta d\eta, \quad i=1,2,3, \quad k_n = \sqrt[3]{\lambda_n^3 + \mu},$$

$$\Delta = \sqrt{3} k_n e^{k_n p} \left(\frac{1}{2} - e^{-\frac{3}{2} k_n p} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n p + \frac{\pi}{6} \right) \right), \quad \alpha = \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_n p, \quad \beta = \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n p,$$

$$\gamma = \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n p + \frac{\pi}{3} \right), \quad \delta = \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n p + \frac{\pi}{3} \right).$$

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yhati

1. Cattabriga L. Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabilia caratteristiche multiple // Rendiconti del seminario matimatico della univ. di Padava. 1961, 31. - pp. 1-45.
2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Монография, Ташкент. Фан. 1986, 220 с.
3. Апаков Ю.П., Умаров Р.А. О разрешимости одной краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в прямоугольной области // Научный вестник НамГУ. 2022. Том 2. N 1 С.6-17.
4. Умаров Р.А. Об одной краевой задаче для неоднородного уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами // Научный вестник НамГУ. 2024. No 2. Ст. 16-27.
5. Умаров Р.А. Краевая задача для третьего порядка с кратными характеристиками в прямоугольной области // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики». Фергана. ФГУ. 12-13.03.2020. – С.152-154.
6. Azlarov T., Mansurov H. Matematik analiz asoslari 2-qism. –Toshkent “Universitet”-2007.–338 b.
7. O‘rinov A.Q. Maxsus funksiyalar va maxsus operatorlar. – Farg‘ona - 2011. – 108 b.
8. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций.–М.:Т.1.Изд.ИЛ. –1949.-798 с.