NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI, [2026-6]
ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427

01.00.00-FIZIKA-MATEMATIKA
journal.namdu.uz
PHYSICS AND MATHEMATICS

DIFFERENSIAL HISOBNING ASOSIY TEOREMALARI VA ULARDAN KELIB CHIQADIGAN NATIJALAR

Abduraximova Sh.A.
NamDU, Matematika yo‘nalishi talabasi
E-mail: abdurahimovashahnoza90@gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu maqola differensial hisobning asosiy teoremalari — Ferma, Roll, Lagranj va Koshi teoremalarining nazariy asoslari va qat‘iy isbotlariga bag‘ishlangan. Shuningdek, ularning xalqaro matematika olimpiadalari (IMC, AKHIMO, SIMO va boshqa musobaqalar) darajasidagi masalalarga qanday qo‘llanilishi ko‘plab misollar va original yechimlar orqali namoyish etilgan.*

Kalit so‘zlar: *Ferma teoremasi, Roll teoremasi, Lagranj teoremasi, Koshi teoremasi.*

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

Аннотация. *Данная статья посвящена теоретическим основам и строгим доказательствам основных теорем дифференциального исчисления — теорем Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Также на многочисленных примерах и оригинальных решениях демонстрируется применение этих теорем при решении задач международного уровня (IMC, AKHIMO, SIMO и других математических олимпиад). Статья предназначена для участников олимпиад и студентов математических направлений.*

Ключевые слова: *Теорема Ферма, теорема Ролля, теорема Лагранжа, теорема Коши.*

MAIN THEOREMS OF DIFFERENTIAL CALCULUS AND THEIR COROLLARIES

Abstract. *This article is dedicated to the theoretical foundations and rigorous proofs of the fundamental theorems of differential calculus — Fermat‘s, Rolle‘s, Lagrange‘s, and Cauchy‘s theorems. Furthermore, their applications in solving problems at the level of international mathematics olympiads (IMC, AKHIMO, SIMO, and other competitions) are demonstrated through numerous examples and original solutions.*

Keywords: *Fermat‘s theorem, Rolle‘s theorem, Lagrange‘s theorem, Cauchy‘s theorem.*

Differensial hisobning asosiy teoremalari — Ferma, Roll, Lagranj va Koshi teoremalari nafaqat funksiyalarning lokal xossalarini o‘rganishda, balki global xulosalar chiqarishda ham kuchli vosita hisoblanadi. Olimpiada masalalarida bu teoremalarni qo‘llash ko‘pincha oddiy algebraik usullar bilan yechib bo‘lmaydigan tengsizliklar, tenglamalar, funksional tenglamalar va sonlar nazariyasiga oid masalalarning chiroyli va qisqa yechimini taqdim etadi. Ayniqsa, differensiallanuvchi funksiyalarning o‘sishi, chegaralanganligi, ildizlari soni va ularning taqsimotiga doir masalalarda ushbu teoremalar ajralmas rol o‘ynaydi.

Maqolada avval har bir teorema keltiriladi, so‘ngra ularning olimpiada amaliyotida qo‘llanilishiga oid tanlangan masalalar tahlil qilinadi. Har bir masala yechimida aynan qaysi teorema va qanday qo‘llangani izohlanadi. Asosiy teoremalar funksiyalarni tekshirishda muhim rol o‘ynaydi [1-4].

1-teorema (Ferma teoremasi). Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan. $x_0 \in X$ nuqtaning atrofi uchun $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset X, (\delta > 0)$ bo‘lib, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ da $f(x) \le f(x_0)$ (yoki $f(x) \ge f(x_0)$) va $f'(x_0)$ mavjud va chekli bo‘lsin. U holda $f'(x_0) = 0$ bo‘ladi.

2-teorema (Roll teoremasi). Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da berilgan bo‘lib, $f(x) \in C[a,b]$; $\forall x \in (a,b)$ da $f'(x)$ mavjud va chekli; $f(a) = f(b)$ bo‘lsa, U holda shunday $x_0 \in (a,b)$ nuqta topiladiki, $f'(x_0) = 0$.

3-teorema (Lagranj teoremasi). Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin: $f(x) \in C[a,b]$; $\forall x \in (a,b)$ da $f'(x)$ mavjud va chekli bo‘lsin. U holda shunday $c \in (a,b)$ nuqta topiladiki,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

bo‘ladi.

Bu teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1-natija. Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lib, $\forall x \in (a,b)$da $f'(x)=0$ bo‘lsin. U holda $\forall x \in (a,b)$ da $f(x)=const$ bo‘ladi.

2-natija. $f(x)$ va $g(x)$ funksiya (a,b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lib, $\forall x \in (a,b)$da $f'(x)=0$ bo‘lsin. U holda $\forall x \in (a,b)$ da $f(x)=const$ bo‘ladi.

4-teorema. (Koshi teoremasi) Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar quyidagi shartlarni bajarsin.

1) $f(x) \in C[a,b]$, $g(x) \in C[a,b]$;

2) $\forall x \in (a,b)$ da $f'(x)$ va $g'(x)$ mavjud va chekli;

3) $\forall x \in (a,b)$ da $g'(x) \neq 0$ bo‘lsin.

U holda shunday $c \in (a,b)$ nuqta topiladiki, $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ bo‘ladi.

Quyida asosiy teoremalarni tatbiq qilishga oid olimpiada masalalari keltiriladi.

1-masala (IMC 2025 [5]). Aytaylik, $f:(0,\infty)\to R$funksiya uzluksiz, differensiallanuvchi bo‘lsin. Agar $b>a>0$ bo‘lib, $f(a)=f(b)=k$ bo‘lsa, u holda

$$f(\xi)-\xi f'(\xi)=k$$

Shartni qanoatlantiruvchi shunday $\exists \xi \in (a,b)$ nuqta topilishini isbotlang.

Yechim. *1-usul*. Quyidagi yordamchi funksiyani ko‘raylik,

$g(x)=\frac{f(x)-k}{x}$.

Masala shartidan foydalansak, $g(a)=g(b)=0$va Roll teoremasining barcha shartlarini bajaradi, U holda Roll teoremasiga binoan, shunday $\exists \xi \in (a,b)$ nuqta topiladiki, bunda $g'(\xi)=0$ bo‘ladi.

$$g'(x)=\frac{f'(x)x-f(x)+k}{x^2} \quad \Rightarrow \quad g'(\xi)=\frac{f'(\xi)\xi-f(\xi)+k}{\xi^2}=0 \Rightarrow f(\xi)-\xi f'(\xi)=k$$

Isbotlandi.

2-usul. Quyidagi yordamchi funksiyani qaraymiz: $g(x)=\frac{f(x)}{x}$. Bu funksiyaning hosilasi quyidagicha bo‘ladi: $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

Endi $g(x)$ va $h(x)=\frac{1}{x}$ funksiyalariga Koshi teoremasini qo‘llaymiz. Teoremaga ko‘ra, [*a, b*] oraliqda shunday $\xi \in (a,b)$ nuqta mavjudki, u uchun quyidagi o‘rinli:

$$\frac{g(a)-g(b)}{h(a)-h(b)}=\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}.$$

Quyidagilarni hisoblaymiz:

$$g(a)=\frac{f(a)}{a}=\frac{k}{a}, g(b)=\frac{f(b)}{b}=\frac{k}{b}, h(a)=\frac{1}{a}, h(b)=\frac{1}{b}, h'(\xi)=-\frac{1}{\xi^2}.$$

Yuqoridagi tenglikni chap va o‘ng tomonlarini alohida hisoblaymiz

$$\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}=\frac{\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=f(\xi)-\xi f'(\xi) \quad \frac{g(a)-g(b)}{h(a)-h(b)}=\frac{\frac{k}{a}-\frac{k}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=k.$$

Natijada $f(\xi)-\xi f'(\xi)=k$.

2-masala (**SIMO 2025**). $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ funksiya uzluksiz va (0,1) da differensiallanuvchi bo‘lsin. $f(0)=0$, $f(1)=\frac{1}{4}$ bo‘lsa, $f'(c_1)+3f'(c_2)=1$shartni qanoatlantiruvchi bir-biridan farqli $c_1 \neq c_2 \in (0;1)$ nuqtalar topilishini isbotlang.

Yechim. [0,1] kesmani $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ va $\left[\frac{1}{4},1\right]$ ga ajratamiz. Lagranj teoremasiga ko‘ra:

$$\exists c_1 \in \left(0;\frac{1}{4}\right): \quad f'(c_1)=\frac{f\left(\frac{1}{4}\right)-f(0)}{\frac{1}{4}-0}, \exists c_2 \in \left(\frac{1}{4};1\right): \quad f'(c_2)=\frac{f(1)-f\left(\frac{1}{4}\right)}{1-\frac{1}{4}}.$$

Hosil bo‘lgan tengliklarni qo‘shamiz:

$$f'(c_1)+3f'(c_2)=\frac{f\left(\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{4}}+\frac{3\left(f(1)-f\left(\frac{1}{4}\right)\right)}{\frac{3}{4}}=1.$$

3-masala (**AKHIMO**). $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ funksiya [0, 1] kesmada uzluksiz va (0,1) intervalda differensiallanuvchi bo‘lib, $f(1)=0$ shartni qanoatlantirsin.

$$f'(c)=\frac{c-1}{c}f(c)$$

Shartni qanoatlantiruvchi $c \in (0,1)$ nuqta mavjudligini isbotlang.

Yechim. Berilgan tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$cf'(c)=(c-1)f(c).$$

$g(x)=xe^{-x}f(x)$ funksiyani qaraylik. Bu funksiya [0, 1] da uzluksiz va (0,1) da differensiallanuvchi, chunki $f(x)$ shu xossalarga ega. Chegaraviy shartlardan:

$g(0) = 0 \cdot e^0 \cdot f(0) = 0,$ $g(1) = 1 \cdot e^{-1} \cdot f(1) = e^{-1} \cdot 0 = 0.$

U holda Roll teoremasi o‘rinli. $g(x)$ funksiya [0, 1] da uzluksiz, (0,1) da differensiallanuvchi va $g(0) = g(1)$ bo‘lgani uchun, Roll teoremasiga ko‘ra, shunday $c \in (0,1)$ nuqta mavjudki, $g'(c) = 0$. $g(x)$ funksiyaning hosilasini topamiz

$$g'(x) = e^{-x}f(x) + x(-e^{-x})f(x) + xe^{-x}f'(x).$$

Bu ifodani soddalashtiramiz:

$$g'(x) = e^{-x}\big(f(x) - xf(x) + xf'(x)\big) = e^{-x}\big((1-x)f(x) + xf'(x)\big).$$

$g'(c) = 0$shartdan

$$e^{-c}\big((1-c)f(c) + cf'(c)\big) = 0.$$

$e^{-c} \neq 0$ bo‘lgani uchun:

$$(1-c)f(c) + cf'(c) = 0.$$

$c \in (0;1)$ bo‘lgani uchun, tenglikni c ga bo‘lsak:

$$f'(c) = \frac{c-1}{c}f(c).$$

4-masala (IMC 2023). V to‘plam [0,1] oraliqda uzluksiz, (0,1) da differensiallanuvchi va $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ funksiya bo‘lsin. Quyidagi shartni qanoatlantiruvchi barcha $\alpha \in \mathbb{R}$ larni toping: har bir $f \in V$ funksiya uchun

$$f'(\xi) + \alpha = f(\xi)$$

bo‘ladigan $\xi \in (0,1)$ mavjud bo‘lsin.

Yechim. *1-usul* Avvalo,

$$h(x) = \frac{e^x - 1}{e - 1}$$

yordamchi funksiyani qaraymiz. Bu funksiya V to‘plamga tegishli, chunki $h(0) = 0, h(1) = 1$, va $h'(x) = \frac{e^x}{e-1}$. Shuningdek,

$$h'(x) - h(x) = \frac{e^x}{e-1} - \frac{e^x - 1}{e-1} = \frac{1}{e-1}$$

o‘zgarmas son. Demak, $\alpha = \frac{1}{e-1}$ bo‘lsagina masala shartini qanoatlantirish mumkin. Endi ixtiyoriy $f \in V$ funksiya uchun

$$g(x) = f(x)e^{-x} + h(-x)$$

yordamchi funksiyani qaraymiz.

$g(0) = 0 + h(0) = 0,$ $g(1) = f(1)e^{-1} + h(-1) = e^{-1} + \frac{e^{-1}-1}{e-1}.$

$e^{-1} + \frac{e^{-1}-1}{e-1} = \frac{e^{-1}(e-1)+e^{-1}-1}{e-1} = \frac{e^{-1}e-e^{-1}+e^{-1}-1}{e-1} = \frac{1-1}{e-1} = 0.$

Shunday qilib, $g(0) = g(1) = 0$.

Roll teoremasiga ko‘ra, (0,1) oraliqda $g'(\xi) = 0$ bo‘ladigan ξ mavjud.

$$g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} - h'(-x) = (f'(x) - f(x))e^{-x} - \frac{e^{-x}}{e-1}.$$

$g'(\xi) = 0$ bo‘lsa,

$$(f'(\xi) - f(\xi))e^{-\xi} = \frac{e^{-\xi}}{e-1} \quad \Rightarrow \quad f'(\xi) - f(\xi) = \frac{1}{e-1}.$$

Demak, $\alpha = \frac{1}{e-1}$ uchun masala sharti bajariladi.

2-usul. $F(x) = f(x)e^{-x}$ yordamchi funksiyaning hosilasi:

$$F'(x) = (f'(x) - f(x))e^{-x}.$$

$G(x) = -e^{-x}$ deb olaylik. Koshi teoremasiga ko‘ra, (0,1) oraliqda quyidagicha ξ mavjud:

$$\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{F(1) - F(0)}{G(1) - G(0)}.$$

Bu yerda $G'(x) = e^{-x}$, $F(1) = f(1)e^{-1} = e^{-1}$, $F(0) = 0$, $G(1) = -e^{-1}$, $G(0) = -1$.

Demak,

$$\frac{(f'(\xi) - f(\xi))e^{-\xi}}{e^{-\xi}} = \frac{e^{-1} - 0}{-e^{-1} + 1} = \frac{1}{e-1}.$$

Shunday qilib, $f'(\xi) - f(\xi) = \frac{1}{e-1}$. Yana bir bor $\alpha = \frac{1}{e-1}$ ekanligi kelib chiqdi. Boshqa α lar uchun masala sharti bajarilmasligini ko‘rsatish mumkin. Agar $f'(x) - f(x) \equiv \frac{1}{e-1}$ bo‘ladigan funksiya topilsa, u holda faqat $\alpha = \frac{1}{e-1}$ bo‘lishi kerak. $F'(x) = \frac{e^{-x}}{e-1}$ deb yozsak,

$$F(x) = \frac{1 - e^{-x}}{e-1}, \quad f(x) = F(x)e^x = \frac{e^x - 1}{e-1}.$$

Bu funksiya V ga tegishli va $f^{'}(x) - f(x) \equiv \frac{1}{e-1}$.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Rudin W. – Principles of Mathematical Analysis. – 3rd ed. – New York: McGraw-Hill, 1976. – 342 p.
2. Fixtengol‘ts G. M. – Differensial va integral hisob kursi. – 1-jild. – Toshkent: O‘qituvchi, 1972. – 607 b.
3. Engel A. – Problem-Solving Strategies. – New York: Springer, 1998. – 403 p
4. Xakimov R.M. Maxammadaliyev M.T.- Matematik analizdan misol va masalalar to‘plami. I qism. Toshkent. 2026
5. https://artofproblemsolving.com/