NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI, [2026-6]
ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427

01.00.00-FIZIKA-MATEMATIKA
journal.namdu.uz
PHYSICS AND MATHEMATICS

UDK 517.956.6

CHORAK SILINDR VA UCHBURCHAKLI TO‘G‘RI PRIZMADAN IBORAT SOHADA TRIKOMI MASALASI YECHIMINING YAGONALIGI

Toshmatov Munosibjon Muxitdin o‘g‘li
Andijon davlat universiteti tayanch doktoranti (PhD)
Email: munosibjontoshmatov@gmail.com

Annotatsiya. *Ishda elliptik qismi chorak silindrdan, giperbolik qismi esa uchburchakli to‘g‘ri prizmadan iborat bo‘lgan aralash sohada uchta singulyar koeffitsiyentli aralash tidagi uch o‘lchovli tenglama uchun Trikomi masalasi tadqiq qilingan. O‘rganilayotgan masalada o‘zgaruvchilarni ajratish usulidan foydalanilgan hamda tenglamaning giperbolik va elliptik sohalarida trivial bo‘lmagan xususiy yechimlar (xos funksiyalar) topilgan. Aralash sohaning giperbolik va elliptik qismlarida topilgan xususiy yechimlar va ularning vaznli hosilalari ulash tekisligida o‘zaro tenglashadi. Natijada aralash sohada qo‘yilgan masalaning trivial bo‘lmagan xususiy yechimlari topilgan. Keyinchalik, aralash sohaning elliptik qismida xos funksiyalar yordamida yordamchi funksiya kiritilgan. Ushbu funksiya va xos funksiyalar tizimining to‘liqlik xossasiga asoslanib, elliptiklik sohasidagi bir jinsli Trikomi masalasi faqat trivial yechimga ega ekanligi isbotlangan. So‘ngra, ulash sharti va uchburchakli to‘g‘ri prizmada Koshi masalasi yechimini beruvchi formula yordamida tenglamaning giperbolik sohasidagi bir jinsli masala ham faqat trivial yechimga ega ekanligi ko‘rsatilgan. Shu tariqa, aralash sohadagi bir jinsli Trikomi masalasi faqat trivial yechimga ega ekanligi, ya’ni yechimning yagonaligi isbotlangan.*

Kalit so‘zlar: *Trikomi masalasi, xos qiymatlar, xos funksiyalar, singulyar koeffitsiyent, Bessel funksiyasi, Gaussning gipergeometrik funksiyasi.*

О ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧА ТРИКОМИ В ОБЛАСТИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ЧЕТВЕРТИ ЦИЛИНДРА И ТРЕУГОЛЬНОЙ ПРЯМОЙ ПРИЗМЫ

Аннотация. *В работе исследована задача Трикоми для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в смешанной области, эллиптическая часть которой четверти цилиндра, а гиперболическая часть –треугольная прямоугольная призма. В исследуемой задаче используется метод разделения переменных и находится нетривиальные частные решения (собственные функции) в областях гиперболичности и эллиптичности уравнения. Частные решения и ее производные с весом, найденные в гиперболических и эллиптических частях смешанной области равняется на плоскости . В результате в смешанной области находится нетривиальные частные решения поставленной задачи. Далее на эллиптической части смешанной области с помощью собственных функций рассмотрено вспомогательная функция. С помощью этой функции и на основании свойства полноты систем собственных функции, доказана что, однородная задача Трикоми в области эллиптичности имеет только тривиальное решение. Затем, с помощью условия склеивания и формулу дающей решение задачи Коши, показано, что однородная задача в области гиперболичности уравнения также имеет только тривиальное решение. Таким образом, показывается, что однородная задача Трикоми в смешанной области имеет только тривиальное решение, т.е. доказывается единственность решения.*

Ключевые слова: *задача Трикоми, собственные значения, собственные функции, сингулярный коэффициент, функция Бесселя, гипергеометрическая функция Гаусса.*

ON THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION TO THE TRICOMI PROBLEM IN A DOMAIN CONSISTING OF A QUARTER CYLINDER AND A TRIANGULAR RIGHT PRISM

Abstract. *This paper investigates the Tricomi problem for a three-dimensional mixed-type equation with three singular coefficients in a mixed domain, where the elliptic part is a quarter cylinder and the hyperbolic part is a triangular right prism. The method of separation of variables is applied to find non-trivial particular solutions (eigenfunctions) in both the hyperbolic and elliptic domains of the equation. The particular solutions and their weighted derivatives found in the hyperbolic and elliptic parts of the mixed domain match on the transition plane. As a result, non-trivial particular solutions of the posed problem are obtained within the mixed*

domain. Furthermore, an auxiliary function is considered in the elliptic part of the mixed domain using the eigenfunctions. By virtue of this function and based on the completeness property of the eigenfunction systems, it is proven that the homogeneous Tricomi problem in the elliptic domain possesses only the trivial solution. Then, using the gluing condition and the formula providing the solution to the Cauchy problem, it is demonstrated that the homogeneous problem in the hyperbolic domain of the equation also has only the trivial solution. Thus, it is shown that the homogeneous Tricomi problem in the mixed domain has only the trivial solution, thereby proving the uniqueness of the solution.

Keywords: *Tricomi problem, eigenvalues, eigenfunctions, singular coefficient, Bessel function, Gauss hypergeometric function.*

1. Введение. Постановка задачи Т

Изучение краевых задач для уравнений смешанного типа в силу его прикладной важности является одной из центральных проблем теории дифференциальных уравнений в частных производных. Впервые Ф.И.Франкль [1] обнаружил важные приложения этих задач в газовой динамике, а И.Н.Векуа [2] указал на важность проблемы уравнений смешанного типа при решении задач, возникающих без моментной теории оболочек.

До настоящего времени исследования краевых задач для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами проводились в основном в случае двух независимых переменных. Однако, такие задачи в трехмерных областях остаются малоизученными.

Задача Трикоми для смешанного эллиптико-гиперболического уравнения в трехмерном пространстве с помощью метода интегрального преобразования Фурье впервые исследована в работе [3]. После этой работы появились ряд работ, в которых рассмотрены краевые задачи для различных уравнений эллиптико-гиперболического типа в трехмерных областях (см. например, [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]).

В данной работе изучается пространственная задача Трикоми для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в области, эллиптическая часть которой четверти цилиндра, а гиперболическая часть – треугольная прямоугольная призма.

Пусть $\Omega = \{(x,y,z): (x,y) \in \Delta, z \in (0,c)\}$, где Δ −конечная односвязная область плоскости xOy, ограниченная при $y \geq 0$ дугой $\bar{\sigma}_0 = \{(x,y): x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ и отрезком $\overline{OM} = \{(x,y): x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$, а при $y \leq 0$ −отрезками $\overline{OQ} = \{(x,y): x + y = 0, 0 \leq x \leq 1/2\}$ и $\overline{QP} = \{(x,y): x - y = 1, 1/2 \leq x \leq 1\}$, $O = O(0,0)$, $M = M(0,1)$, $P = P(1,0)$, $Q = Q(1/2, -1/2)$.

Введем обозначения: $\Omega_0 = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_1 = \Omega \cap (y < 0)$,

$\Delta_0 = \Delta \cap (y > 0)$, $\Delta_1 = \Delta \cap (y < 0)$, $\bar{S}_0 = \{(x,y,z): \bar{\sigma}_0 \times [0,c]\}$,

$\bar{S}_1 = \{(x,y,z): \overline{OM} \times [0,c]\}$, $\bar{S}_2 = \{(x,y,z): \overline{OQ} \times [0,c]\}$,

$\bar{S}_3 = \{(x,y,z): \bar{\Omega} \cap (z = 0)\}$, $\bar{S}_4 = \{(x,y,z): \bar{\Omega} \cap (z = c)\}$.

В области $\Omega_0 \cup \Omega_1$ рассмотрим уравнение

$$U_{xx} + (\mathrm{sgn} y) U_{yy} + U_{zz} + \frac{2\beta}{x} U_x + \frac{2\beta}{|y|} U_y + \frac{2\gamma}{z} U_z = 0, \qquad (1)$$

где $\beta, \gamma \in R$, причем $\beta, \gamma \in (0,1/2)$.

В области Ω уравнение (1) принадлежит смешанному типу, а именно в области Ω_0-эллиптическому типу, а в области Ω_1 - гиперболическому типу, причем $x = 0, y = 0$ и $z = 0$ являются плоскостями сингулярности уравнения, а при переходе через прямоугольника $\bar{\Omega}_0 \cap \bar{\Omega}_1$ уравнения меняет свой тип.

Исследуем следующую задачу для уравнения (1) в области Ω.

Задача Т (Трикоми). Найти функцию $U(x,y,z)$, удовлетворяющую в области $\Omega_0 \cup \Omega_1$ уравнению (1) и следующим условиям:

$$U(x,y,z) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^{2,2,2}_{x,y,z}(\Omega_0 \cup \Omega_1), x^{2\beta} U_x, z^{2\gamma} U_z \in C(\bar{\Omega}); \quad (2)$$

$$U(x,y,z)|_{\bar{S}_0 \cup \bar{S}_1 \cup \bar{S}_2} = 0; \quad (3)$$

$$U(x,y,z)|_{\bar{S}_3} = f_1(x,y), U(x,y,z)|_{\bar{S}_4} = f_2(x,y) \quad (4)$$

а также условию склеивания

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{2\beta} U_y(x,y,z) = \lim_{y \to +0} y^{2\beta} U_y(x,y,z), x \in (0,1), z \in (0,c), \quad (5)$$

где $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$–заданные функции.

Следует отметить, что в работе [8] К.Т.Каримовым была исследована задача Трикоми для уравнения (1) в области Ω. В указанной работе рассматривалась постановка, при которой на части $\bar{S}_0$ области Ω задаётся значение функции, тогда как на частях $\bar{S}_j, j = \overline{1,4}$, значение функции принимается равным нулю, то есть исследовался иной вариант задачи Трикоми. В настоящей работе рассматриваемая задача является новой и с методической точки зрения существенно отличается от ранее изученных задач.

2. Построения частных решений уравнения (1) в области гиперболичности и эллиптичности уравнения

Находим нетривиальные решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (2), (3) и (5). Разделив переменные по формуле $U(x,y,z)=u(x,y)Z(z)$, из уравнения (1) и краевых условий (2), (3) и (5), получим уравнение $Z''(z)+\frac{2\gamma}{z}Z'(z)-\lambda Z(z)=0, z\in(0,c)$ (6)

и следующая задача на собственные значения:

$u_{xx}+(sgn\,y)u_{yy}+\frac{2\beta}{x}u_x+\frac{2\beta}{|y|}u_y+\lambda u=0,(x,y)\in$ \{y = 0\}, (7)

$u(x,y)|_{\tilde{\sigma}_0}=0, u(x,y)|_{\overline{OM}}=0, u(x,y)|_{\overline{OQ}}=0,$ (8)

Те значения параметра λ и соответствующие им функции $u(x,y)$, которые требуется найти в задаче {(7), (8)}, являются соответственно собственными значениями и собственными функциями задачи {(7), (8)}. Методом интегралов энергии нетрудно убедиться, что при $\lambda=0$ задача {(7), (8)} имеет только тривиальное решение. Поэтому значения параметра λ, при которых существуют функции $u(x,y)\neq 0$, удовлетворяющие уравнениям (7) и условиям (8), ищем среди чисел $\lambda\neq 0$.

Итак, пусть $\lambda\neq 0$. Нетривиальную в $\overline{\Delta}$ функцию $u(x,y)$, которую требуется найти в задаче {(7), (8)}, в области Δ_1 ищем в виде

$u_{xx}-u_{yy}+\frac{2\beta}{x}u_x-\frac{2\beta}{y}u_y+\lambda u=0,(x,y)\in\Delta_1,$ (9)

$u(x,y)|_{\overline{OQ}}=0.$ (10)

Решение этой задачи ищем в виде

$u(x,y)=X(\xi)Q(\eta)$, где $\xi=\sqrt{x^2-y^2}, \eta=x^2/(x^2-y^2).$ (11)

Тогда относительно функций $X(\xi)$ и $Q(\eta)$ получим следующие условия $X(0)=0$, $\left|\lim_{\eta\to+\infty}Q(\eta)\right|<+\infty$ и уравнения

$\xi^2X''(\xi)+(1+4\beta)\xi X'(\xi)+(\lambda\xi^2-\mu)X(\xi)=0,\xi\in(0,1);$ (12)

$\eta(1-\eta)Q''(\eta)+[1/2+\beta-(1+2\beta)\eta]Q'(\eta)+(\mu/4)Q(\eta)=0,\eta\in(1,+\infty),$ (13)

где $\mu-$ константа разделения.

Общее решение уравнения (12) имеют вид [14],

$X(\xi)=c_1\xi^{-2\beta}J_\omega(\sqrt{\lambda}\xi)+c_2\xi^{-2\beta}Y_\omega(\sqrt{\lambda}\xi),$ (14)

где $\omega=\sqrt{4\beta^2+\mu}$, а $J_\omega(z)$ и $Y_\omega(z)$ - функции Бесселя порядка ω первого и второго рода соответственно [13], а c_1,c_2 −произвольные постоянные.

Из этой формулы следует, что решение уравнения (12), удовлетворяющие условию $X(0)=0$, существуют при $Re\,\omega>2\beta$ и они, с точностью до постоянного множителя имеют вид

$X(\xi)=c_1\xi^{-2\beta}J_\omega(\sqrt{\lambda}\xi),\ \omega=\sqrt{4\beta^2+\mu}.$ (15)

Уравнение (13) является гипергеометрическим уравнением Гаусса [16]. Его общее решение определяется формулой [16]

$$Q(\eta)=c_3\eta^{-\beta-\omega/2}F(\beta+\omega/2,1/2+\omega/2,1+\omega;1/\eta)+$$

$c_4\eta^{-\beta+\omega/2}F(\beta-\omega/2,1-\omega/2,1-\omega;1/\eta),$ (16)

где F −гипергеометрическая функция Гаусса [16], а c_3,c_4- произвольные постоянные.

Так как $\mathrm{Re}\omega>2\beta$, то из (16) следует, что для того чтобы получить ограниченную при $\eta\to+\infty$ функцию, в формуле надо положить $c_4=0$, и полагая $c_3=1$ (это не нарушает общности), в итоге чего, получим

$Q(\eta)=\eta^{-\beta-\omega/2}F(\beta+\omega/2,1/2+\omega/2,1+\omega;1/\eta).$ (17)

Следовательно, непрерывные и нетривиальные в $\bar{\Delta}_1$ решения задачи {(7), (8)}, согласно (11), (15) и (17), определяются равенствами

$$u^-(x,y)=c_1x^{-2\beta-\omega}(x^2-y^2)^{\omega/2}J_\omega\left(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\right)\times$$

$\times F(\beta+\omega/2,(1+\omega)/2,1+\omega;1-y^2/x^2), c_1\neq 0.$ (18)

Отсюда, пользуясь известными формулами [16]

$F(A,B,C;1)=\Gamma(C)\Gamma(C-A-B)/[\Gamma(C-A)\Gamma(C-B)], C-A-B>0,$ (19)

$F(A,B,C;x)=(1-x)^{C-A-B}F(C-A,C-B,C;x),$ (20)

находим

$$\begin{cases}\tau^-(x)=\lim\limits_{y\to-0}u(x,y)=c_1k_1(\omega)x^{-2\beta}J_\omega(\sqrt{\lambda}x),\ x\in[0,1];\\ \nu^-(x)=\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{2\beta}u_y(x,y)=c_1k_2(\omega)x^{-1}J_\omega(\sqrt{\lambda}x),\ x\in(0,1),\end{cases}$$ (21)

где $\Gamma(z)$ −гамма функция Эйлера [16],

$k_1(\omega)=\frac{\Gamma(1+\omega)\Gamma(1/2-\beta)}{\Gamma(1-\beta+\omega/2)\Gamma[(1+\omega)/2]}$, $k_2(\omega)=\frac{2\Gamma(1+\omega)\Gamma(1/2+\beta)}{\Gamma(\beta+\omega/2)\Gamma[(1+\omega)/2]}$. (22)

Из равенства (21), найдем связь между функциями $\tau^-(x)$ и $\nu^-(x)$:

$\nu^-(x)=\frac{2\Gamma(1/2+\beta)\Gamma(1-\beta+\omega/2)}{\Gamma(\beta+\omega/2)\Gamma(1/2-\beta)}x^{2\beta-1}\tau^-(x), x\in(0,1).$ (23)

Теперь рассмотрим задачу {(7), (8)} в области Δ_0, т.е. рассмотрим следующую задачу:

$u_{xx}+u_{yy}+\frac{2\beta}{x}u_x+\frac{2\beta}{y}u_y+\lambda u=0,(x,y)\in\Delta_0,$ (24)

$u(x,y)|_{\tilde{\sigma}_0}=0, u(x,y)|_{\overline{OM}}=0.$ (25)

Разделив переменные по формуле $u(x,y)=R(r)\Phi(\phi),$ (26)

где $r=\sqrt{x^2+y^2}, \phi=arctg(y/x),$ из уравнения (24) и условия (25), получим следующие задачи на собственные значения:

$r^2R''(r)+(1+4\beta)rR'(r)+(\lambda r^2-\tilde{\mu})R(r)=0, r\in(0,1),$ (27)

$R(0)=0, R(1)=0;$ (28)

$\Phi''(\phi)+4\beta ctg(2\phi)\Phi'(\phi)+\tilde{\mu}\Phi(\phi)=0, \phi\in(0,\pi/2),$ (29)

$\Phi(\pi/2)=0,$ (30)

где $\tilde{\mu}-$ константа разделения.

Сначала исследуем задачи {(27), (28)}. Общее решение уравнения (27) определяется в виде [8] $R(r)=c_5r^{-2\beta}J_{\tilde{\omega}}(\sqrt{\lambda}r)+c_6r^{-2\beta}Q_{\tilde{\omega}}(\sqrt{\lambda}r), r\in[0,1],$ (31)

здесь c_5, c_6 - произвольные постоянные, $\tilde{\omega}=\sqrt{4\beta^2+\tilde{\mu}}$.

Из (31) следует, что решения уравнения (27), удовлетворяющие первую условию из (28), существуют при $\widetilde{Re\,\omega}>2\beta$ и они определяются равенствами

$R(r)=c_5r^{-2\beta}J_{\tilde{\omega}}(\sqrt{\lambda}r).$ (32)

Теперь, исследуем задачу {(29), (30)}. Общее решение уравнения (29) имеет вид [14] $\Phi(\phi)=c_7F(\beta+\tilde{\omega}/2,\beta-\tilde{\omega}/2,\beta+1/2;sin^2\phi)+$

$+c_8(sin^2\phi)^{1/2-\beta}F[(1+\tilde{\omega})/2,(1-\tilde{\omega})/2,(3/2)-\beta;sin^2\phi], \phi\in[0,\pi/2],$ (33)

где c_7 и c_8 - произвольные постоянные.

Удовлетворяя функцию (33) условию (30) и применяя формулы (19), (20), получим $c_8=k_3(\tilde{\omega})c_7$, где

$k_3(\tilde{\omega})=-\frac{\Gamma(\beta+1/2)\Gamma(1-\beta-\omega/2)\Gamma(1-\beta+\omega/2)}{\Gamma(3/2-\beta)\Gamma[(1-\omega)/2]\Gamma[(1+\omega)/2]}.$ (34)

Подставляя в (33) $c_8=k_3(\tilde{\omega})c_7$ и полагая $c_7=1$ (это не нарушает общности), имеем $\Phi(\phi)=F(\beta+\tilde{\omega}/2,\beta-\tilde{\omega}/2,\beta+1/2;sin^2\phi)+$

$+k_3(\tilde{\omega})(sin\phi)^{1-2\beta}F[(1+\tilde{\omega})/2,(1-\tilde{\omega})/2,3/2-\beta;sin^2\phi].$ (35)

На основании (26), (32) и (35), заключаем, что непрерывные и нетривиальные в $\bar{\Delta}_0$ решения задачи {(24), (25)}, имеют вид

$u^+(x,y)=c_5r^{-2\beta}J_{\tilde{\omega}}(\sqrt{\lambda}r)\{F(\beta+\tilde{\omega}/2,\beta-\tilde{\omega}/2,\beta+1/2;sin^2\phi)+$

$+k_3(\tilde{\omega})(sin\phi)^{1-2\beta}F[(1+\tilde{\omega})/2,(1-\tilde{\omega})/2,3/2-\beta;sin^2\phi]\}, c_5\neq0.$ (36)

Отсюда, непосредственным вычислением, находим

$$\begin{cases}\tau^+(x)=\lim\limits_{y\to+0}u(x,y)=c_5x^{-2\beta}J_{\tilde{\omega}}(\sqrt{\lambda}x),\ x\in[0,1];\\ \nu^+(x)=\lim\limits_{y\to+0}y^{2\beta}u_y(x,y)=c_5(1-2\beta)k_3(\tilde{\omega})x^{-1}J_{\tilde{\omega}}(\sqrt{\lambda}x),\ x\in(0,1).\end{cases}$$ (37)

Из равенства (37), найдем связь между функциями $\tau^+(x)$ и $\nu^+(x)$:

$\nu^+(x)=\frac{-2\Gamma(1/2+\beta)\Gamma(1-\beta-\tilde{\omega}/2)\Gamma(1-\beta+\tilde{\omega}/2)}{\Gamma(1/2-\tilde{\omega}/2)\Gamma(1/2+\tilde{\omega}/2)\Gamma(1/2-\beta)}x^{2\beta-1}\tau^+(x).$

Исходя из известной формулы $\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\pi/sin(a\pi)$, $a\notin Z$, последнее выражение можно представить следующим образом:

$\nu^+(x)=-\frac{2\Gamma(1/2+\beta)\Gamma(1-\beta+\tilde{\omega}/2)}{\Gamma(\beta+\tilde{\omega}/2)\Gamma(1/2-\beta)}\frac{cos(\tilde{\omega}\pi/2)}{sin[(\beta+\tilde{\omega}/2)\pi]}x^{2\beta-1}\tau^+(x).$ (38)

На основании $U(x,y,z)=u(x,y)Z(z)$, равенства (38), можно представить в виде $\lim\limits_{y\to+0}y^{2\beta}U_y(x,y,z)=-\frac{2\Gamma(1/2+\beta)\Gamma(1-\beta+\tilde{\omega}/2)}{\Gamma(\beta+\tilde{\omega}/2)\Gamma(1/2-\beta)}\times$

$\times\frac{cos(\tilde{\omega}\pi/2)}{sin[(\beta+\tilde{\omega}/2)\pi]}x^{2\beta-1}U(x,0,z).$ (39)

Далее, из введенных обозначений, из условий $U(x,y,z)\in C(\bar{\Omega})$ и (5) следуют следующие равенства:

$$\begin{cases}\tau^-(x)=\tau^+(x), x\in[0,1],\\ \nu^-(x)=\nu^+(x), x\in(0,1).\end{cases}$$

Учитывая это и полагая $\omega = \tilde{\omega}$, а затем, приравнивая формулы (23) и (38), имеем тригонометрическое уравнение относительно ω: $sin[\pi(\beta + \omega/2)] + cos(\omega\pi/2) = 0$. Выписывая решения этого уравнения и принимая во внимание условие $\omega > 2\beta$, находим $\omega_n = 2n - \beta - 1/2, n \in N$. (40)

На основании (40), числа $\mu_n = \omega_n^2 - 4\beta^2, n \in N$ является собственными значениями задач {(13), $\left|\lim_{\eta\to+\infty} Q(\eta)\right| < +\infty$} и {(29), (30)}.

Далее, полагая в (32) $\omega = \omega_n$, $n \in N$, а затем удовлетворяя полученную функцию к вторую условию (28), имеем уравнения относительно λ:

$$J_{\omega_n}(\sqrt{\lambda}) = 0, n \in N. \qquad (41)$$

Так как $\omega_n > 0, \forall n \in N$, то согласно теории бесселевых функций [13], уравнения (41) имеют только вещественные корни, причем эти корни счетного числа и с попарно противоположными знаками. Обозначим через θ_{nm} - m -ый положительный корень уравнения (41), надем собственные значения задачи {(7), (8)}: $\lambda = \theta_{nm}^2, n, m \in N$.

Принимая во внимание доказанное выше и полагая в (18) и (36) $\omega = \tilde{\omega} = \omega_n$, $c_1 = c_5 = 1$ (это не нарушает общности), в области Δ составим следующую систему функций:

$$u_{nm}(x,y) = \begin{cases} u_{nm}^+(x,y), (x,y) \in \bar{\Delta}_0, n, m \in N, \\ u_{nm}^-(x,y), (x,y) \in \bar{\Delta}_1, n, m \in N, \end{cases} \qquad (42)$$

$$u_{nm}^+(x,y) = r^{-2\beta} J_{\omega_n}(\theta_{nm} r)\left\{k_3(\omega_n)(\sin\phi)^{1-2\beta} F\left(\tfrac{1+\omega_n}{2}, \tfrac{1-\omega_n}{2}, \tfrac{3}{2} - \beta; \sin^2\phi\right) + \right.$$
$$\left. + F\left(\beta + \tfrac{\omega_n}{2}, \beta - \tfrac{\omega_n}{2}, \beta + \tfrac{1}{2}; \sin^2\phi\right)\right\}, r = \sqrt{x^2 + y^2}, \phi = arctg(y/x),$$
$$u_{nm}^-(x,y) = \xi^{-2\beta}\eta^{-\beta-\omega/2} J_{\omega_n}(\theta_{nm}\xi) F\left(\beta + \tfrac{\omega_n}{2}, \tfrac{1+\omega_n}{2}, 1 + \omega_n; \tfrac{1}{\eta}\right),$$

$\xi = \sqrt{x^2 - y^2}, \eta = x^2/\xi^2$.

Функция (42) являются непрерывными и нетривиальными в области $\bar{\Delta}$ решениями задачи {(7), (8)}.

Полагая в уравнении (6) $\lambda = \theta_{nm}^2$, найдем его общее решение [12]

$Z_{nm}(z) = c_9 z^{1/2-\gamma} I_{1/2-\gamma}(\theta_{nm} z) + c_{10} z^{1/2-\gamma} K_{1/2-\gamma}(\theta_{nm} z), z \in [0, c],$ (43)

где c_9 и c_{10} - произвольные постоянные.

Тогда, функции

$U_{nm}(x,y,z) = u_{nm}(x,y) Z_{nm}(z), (x,y) \in \breve{}, n, m \in N,$ (44)

где $u_{nm}(x,y)$ и $Z_{nm}(z)$– функции, определяемые равенствами (42) и (43), являются непрерывными и нетривиальными в $\overline{\Delta}$ решениями уравнения (1), удовлетворяющие условиям (2), (3) и (5).

Здесь, по пути отметим, что в работе [14] доказана, что функция (35) при $\tilde{\omega} = \omega_n$ перепишется в виде

$$\Phi_n(\varphi) = k_4(\omega_n)(\cos\varphi)^{1-2\beta} F\left(\tfrac{1-\omega_n}{2}, \tfrac{1+\omega_n}{2}; \tfrac{3}{2} - \beta; \cos^2\varphi\right) =$$
$$= \frac{\Gamma(1-\beta-\omega_n/2)\Gamma(1-\beta+\omega_n/2)}{2^{1/2-\beta}\Gamma(1/2-\beta)} (\sin 2\phi)^{1/2-\beta} P_{(\omega_n-1)/2}^{\beta-1/2}(-\cos 2\phi), \qquad (45)$$

где $k_4(\omega_n) = \frac{\Gamma(1-\beta-\omega_n/2)\Gamma(1-\beta+\omega_n/2)}{\Gamma(1/2-\beta)\Gamma(3/2-\beta)}$, $P_a^b(x)$ –функция Лежандра [16].

Из леммы 3 работы [17], на основании теоремы 2 работы [18], при $\beta \in (0,1/2)$, следует, что система собственных функций (45) полна в пространстве $L_2(0,\pi/2)$.

3. Единственность решения задачи Т

Теорема 1. Если существует решение задачи Т, то оно единственно.

Доказательство. Пусть $U(x,y,z) = V(r,\phi,z)$есть решения задачи Т в области Ω_0. Для удобства введем в области Ω_0 цилиндрические координаты (r,ϕ,z), связанные с декартовыми координатами (x,y,z) по формулам $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $z = z$ ($r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\phi = arctg(y/x)$).

В цилиндрических координатах, область Ω_0 переходит в область $\tilde{\Omega}_0 = \{(r,\phi,z): r \in (0,1), \phi \in (0,\pi/2), z \in (0,c)\}$, а уравнения (1) и условия (4), отражается в следующем виде

$V_{rr} + \frac{1}{r^2}V_{\phi\phi} + \frac{1+4\beta}{r}V_r + \frac{4\beta ctg2\phi}{r^2}V_\phi + V_{zz} + \frac{2\gamma}{z}V_z = 0, (r,\phi,z) \in \tilde{\Omega}_0,$ (46)

$V(r,\phi,0) = f_1(r\cos\phi, r\sin\phi), V(r,\phi,c) = f_2(r\cos\phi, r\sin\phi),$ (47)

С помощью функций $V(r,\phi,z)$ и собственных функций

$R_{nm}(r) = r^{-2\beta} J_{\omega_n}(\theta_{nm} r),$ (48)

и (45) составим следующую функцию:

$\vartheta_{nm}(z) = d_{nm}\int_0^1\int_0^{\pi/2} V(r,\phi,z)(\sin 2\phi)^{2\beta}\Phi_n(\phi) r^{1+4\beta} R_{nm}(r)\, d\phi dr, n, m \in N,$ (49)

где $d_{nm} = 2/J_{\omega_n+1}^2(\theta_{nm})$.

По пути отметим, что для каждого фиксированного $n \in N$ система функций (48) образует ортогональную и полную систему в пространстве $L_2(0,1)$ с весом $r^{1+4\beta}$.

На основании (49) введем функции

$$\vartheta_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(z) = d_{nm}\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1}\int_{\varepsilon_2}^{\pi/2-\varepsilon_2} V(r,\phi,z)(sin\,2\phi)^{2\beta}\Phi_n(\phi)r^{1+4\beta}R_{nm}(r)d\phi dr, \qquad (50)$$

где ε_1 и ε_2 - достаточно малые положительные числа.

Очевидно, что $\lim\limits_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0}\vartheta_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(z) = \vartheta_{nm}(z)$.

С помощью функции (50) и уравнения (46), найдем $\left[\vartheta_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(z)\right]'' + \frac{2\gamma}{z}\left[\vartheta_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(z)\right]'$:

$$\left[\vartheta_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(z)\right]'' + \frac{2\gamma}{z}\left[\vartheta_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(z)\right]' = -d_{nm}\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} r^{-1+4\beta}R_{nm}(r)\times$$

$$\times\left[\int_{\varepsilon_2}^{\pi/2-\varepsilon_2}\left((sin\,2\phi)^{2\beta}\Phi_n(\phi)V_{\phi\phi} + 4\beta ctg2\phi(sin\,2\phi)^{2\beta}\Phi_n(\phi)V_\phi\right)d\phi\right]dr -$$

$$-d_{nm}\int_{\varepsilon_2}^{\pi/2-\varepsilon_2}(sin\,2\varphi)^{2\beta}\Phi_n(\varphi)\left[\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1}(r^{1+4\beta}R_{nm}(r)V_{rr} + (1+4\beta)r^{4\beta}R_{nm}(r)V_r)\,dr\right]d\varphi.$$

Применяя правило интегрирования по частям, из последнего получим

$$\left[\vartheta_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(z)\right]'' + \frac{2\gamma}{z}\left[\vartheta_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(z)\right]' =$$

$$= -d_{nm}\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} r^{-1+4\beta}R_{nm}(r)\left[\left[\left(\Phi_n(\varphi)V_\varphi - \Phi_n'(\varphi)V\right)(sin\,2\varphi)^{2\beta}\right]\right|_{\varphi=\varepsilon_2}^{\varphi=\pi/2-\varepsilon_2} -$$

$$-d_{nm}\int_{\varepsilon_2}^{\pi/2-\varepsilon_2}(sin\,2\varphi)^{2\beta}\mu_n\Phi_n(\varphi)V(r,\varphi,z)d\varphi\Big]dr -$$

$$-d_{nm}\int_{\varepsilon_2}^{\pi/2-\varepsilon_2}(sin\,2\varphi)^{2\beta}\Phi_n(\varphi)\left[\left[\left(R_{nm}(r)V_r - R_{nm}'(r)V\right)r^{1+4\beta}\right]\right|_{r=\varepsilon_1}^{r=1-\varepsilon_1} -$$

$$-d_{nm}\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} r^{-1+4\beta}((\theta_{nm}r)^2 - \mu_n)R_{nm}(r)V\,dr\Big]d\varphi.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\varepsilon_1 \to 0$ и $\varepsilon_2 \to 0$, учитывая (2), (3), (28), (30) и (39) и обозначение (49), получим равенство

$$\vartheta_{nm}''(z) + \frac{2\gamma}{z}\vartheta_{nm}'(z) - \lambda_{nm}\vartheta_{nm}(z) = 0.$$

Следовательно, функция $\vartheta_{nm}(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (6) при $\lambda = \lambda_{nm}$. Кроме того, в силу граничного условия (47), из (49) следует, что функция $\vartheta_{nm}(z)$ удовлетворяет следующее граничное условие:

$$\vartheta_{nm}(0) = f_{1nm},\ \vartheta_{nm}(c) = f_{2nm} \qquad (51)$$

$$f_{jnm} = d_{nm}\int_0^1\int_0^{\pi/2}\tilde{f}_j(r,\varphi)r^{1+4\beta}R_{nm}(r)(sin\,2\varphi)^{2\beta}\Phi_n(\varphi)\,drd\varphi, j = \overline{1,2}, \quad (52)$$

$$\tilde{f}_j(r,\varphi) = f_j(r\cos\varphi, r\sin\varphi), j = \overline{1,2}.$$

Отсюда следует, что функция $\vartheta_{nm}(z)$, которая имеет вид (49), является решением уравнения (6) при $\lambda = \lambda_{nm}$, удовлетворяющим условиям (51). Поэтому, удовлетворяя общее решение (43) уравнения (6) (при $\lambda = \lambda_{nm}$) условиям (51), однозначно находим $\vartheta_{nm}(z)$:

$$\vartheta_{nm}(z) = P_{nm}(z)f_{2nm} + \left[\bar{K}_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}z\right) - P_{nm}(z)\bar{K}_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}c\right)\right]f_{1nm}, \quad (53)$$

где $P_{nm}(z) = \left(\frac{z}{c}\right)^{1/2-\gamma}\frac{I_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}z\right)}{I_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}c\right)}$, $\overline{K}_\nu(x) = \frac{2^{1-\nu}x^\nu K_\nu(x)}{\Gamma(\nu)}$, $\nu > 0$.

Из изложенного выше следует, что каждая из функций

$$U_{nm}(x,y,z) = \vartheta_{nm}(z)u_{nm}(x,y) \qquad (54)$$

где $\vartheta_{nm}(z)$ и $u_{nm}(x,y)$ - функции, определяемые соответственно равенствами (53), (42), удовлетворяет условиям задачи Т кроме условий (2).

Для доказательства теоремы 1, достаточно доказать, что однородная задача Т имеет только тривиальные решения. Пусть $f_j(x,y) \equiv 0, j = \overline{1,2}$. Тогда $f_{jnm} = 0, j = \overline{1,2}$ при всех $n,m \in N$. На основании этого, из (53) и (49) следует, что $\int_0^1\int_0^{\pi/2} V(r,\phi,z)(sin\,2\phi)^{2\beta}\Phi_n(\phi)r^{1+4\beta}R_{nm}(r)d\phi dr = 0, z \in [0,c]$.

Отсюда, в силу полноты системы собственных функций (48) в пространстве $L_2(0,1)$ с весом $r^{1+4\beta}$ и $V(r,\phi,z) = U(x,y,z) \in C(\bar{\Omega}_0)$, следует

$$\int_0^{\pi/2} V(r,\phi,z)(sin\,2\phi)^{2\beta}\Phi_n(\phi)d\phi = 0, r \in [0,1], z \in [0,c].$$

Если учесть полноту системы собственных функций (45) в пространстве $L_2(0,\pi/2)$ и $V(r,\phi,z) = U(x,y,z) \in C(\bar{\Omega}_0)$, то из последнего равенства вытекает, что $V(r,\phi,z) = U(x,y,z) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_0$.

Пользуясь этим равенством и $U(x,y,z) = V(\rho,\phi,z)$, легко убедиться, что $U(x,+0,z) \equiv 0$, $\lim\limits_{y\to+0} y^{2\beta}U_y(x,y,z) \equiv 0, x \in [0,1], z \in [0,c]$.

Тогда, в силу условий склеивания (5), справедливы равенства

$$U(x,-0,z) \equiv 0,\ \lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta}U_y(x,y,z) \equiv 0, x \in [0,1], z \in [0,c]. \qquad (55)$$

Из результатов работы [15] следует, что решение уравнения

$$U_{xx} - U_{yy} + U_{zz} + \frac{2\beta}{x}U_x - \frac{2\beta}{y}U_y + \frac{2\gamma}{z}U_z = 0, (x,y,z) \in \Omega_1,$$

удовлетворяющее условиям (55), тождественно равно нулю, т.е. $U(x,y,z) \equiv 0, (x,y,z) \in \bar{\Omega}_1$. Теорема 1 доказана.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М., Наука. 1973.

2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитический функции. М., ГИФМЛ, 1959.

3. Бицадзе А.В. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 5. С. 642–644.

4. Ежов А.М., Пулькин С.П. Оценка решения задачи Трикоми для одного класса уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193, № 5. С. 978–980.

5. Нахушев А.М. Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта // Дифференц. уравнения. Минск, 1968. Т. 4, № 1. С. 52–62.

6. Пономарев С.М. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в трехмерных областях // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246, № 6. С. 1303–1306.

7. Салахиддинов М.С., Исломов Б. Краевые задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа в пространстве // Узб. мат. журн. 1993. № 3. С. 13–20.

8. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Трикоми для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами// Вестник НУУз. – Ташкент, 2016. -2/1. -С. 14-25.

9. Уринов А.К., Каримов К.Т., "Задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами", Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.-мат. науки, 21:4 (2017), 665-683

10. Назипов И.Т. Решение пространственной задачи Трикоми для сингулярного уравнения смешанного типа методом интегральных уравнений// Известия вузов, -2011. -№3. –С.69-85.

11. Сабитов К.Б., Карамова А.А. Спектральные свойства решений задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа и их применения// *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2001, том 65, № 4, 133–150.

12. Каримов К.Т. Задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде// Вестник Удмуртского университета. Матем. Мех. Компьют. науки, –2020, -Т.30, -№1. -С. 31-48.

13. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. –М.: Т.1.Изд. ИЛ., 1949. -798 с.

14. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. К спектральной теории уравнений смешанного типа. –Ташкент: Mumtoz So'z, 2010. -355 с.

15. Каримов Ш.Т. Решение задачи Коши для трехмерного гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами и со спектральным параметром//Узбекский математический журнал. 2014, №2, -С. 55-65.

16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра. -М.: Наука, 1973. -296 с.

17. Мамедов Я.Н. О некоторых задачах на собственные значения для уравнения смешанного типа//Дифференциальные уравнения, -1990. –Т.26, -№1. -С.163-167.

18. Моисеев Е.И. О базисности синусов и косинусов//Доклады АН СССР, -1984. -т.275, -№4. –С.794-798.