NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI, [2026-6]
ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427

01.00.00-FIZIKA-MATEMATIKA
journal.namdu.uz
PHYSICS AND MATHEMATICS

LOBACHEVSKIY GEOMETRIYASIDA TO‘G‘RI CHIZIQLARNING O‘ZARO VAZIYATI VA PROYEKSIYA XOSSALARI

Mamadaliev Botirjon Mullaaminovich
Farg‘ona davlat universiteti, f-.m.f.b.f.d., (PhD)
mamadaliyev_botirjon@mail.ru
Topvoldiyev Kamronbek Rustamjon o‘g‘li
Farg‘ona davlat universiteti, talabasi
kamronbektopvoldiyev@gmail.com
Abduraximov Ilyosbek Safarali o‘g‘li
Farg‘ona davlat universiteti, talabasi
ismoiljonabdurahimov1997@gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu maqolada Lobachevskiy geometriyasida to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashuvi bilan bog‘liq uchta asosiy parallellik, uzoqlashuvchi chiziqlar va ortogonal proyeksiya tizimli ravishda bayon qilingan. Ish Kelli-Kleyn modeli talqiniga tayangan holda olib borilgan. Berilgan to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan nuqtadan shu chiziq bilan kesishmaydigan cheksiz ko‘p to‘g‘ri chiziq o‘tishi, ular orasida ikkita chegaraviy parallel mavjud bo‘lishi va perpendikulyar masofa ortishi bilan parallellik burchagining kamayishi ko‘rsatilgan. Shuningdek, chiziqlarning o‘zaro joylashuviga qarab proyeksiyaning ochiq nur yoki ochiq kesma ko‘rinishida bo‘lishi isbotlangan. Olingan natijalar Lobachevskiy geometriyasining Yevklid geometriyasidan muhim farqlarini ochib bergan.*

Kalit so‘zlar: *Lobachevskiy geometriyasi, giperbolik tekislik, parallel to‘g‘ri chiziq, parallellik burchagi, uzoqlashuvchi chiziqlar, proyeksiya.*

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПРОЕКЦИОННЫЕ СВОЙСТВА В ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Аннотация. *В данной статье систематически изложены три основных направления, связанные с взаимным расположением прямых в геометрии Лобачевского: параллельность, расходящиеся прямые и ортогональная проекция. Исследование проводится на основе интерпретации модели Кэли-Клейна. Показано, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит бесконечно много прямых, не пересекающих эту прямую, среди которых существуют две предельные параллельные прямые. Также установлено, что с увеличением перпендикулярного расстояния угол параллельности уменьшается. Кроме того, доказано, что в зависимости от взаимного расположения прямых проекция может иметь вид открытого луча или открытого отрезка. Полученные результаты раскрывают существенные отличия геометрии Лобачевского от евклидовой геометрии.*

Ключевые слова: *геометрия Лобачевского, гиперболическая плоскость, параллельные прямые, угол параллельности, расходящиеся прямые, проекция.*

THE MUTUAL POSITION OF STRAIGHT LINES AND PROJECTION PROPERTIES IN LOBACHEVSKY GEOMETRY

Abstract. *This article systematically presents three main aspects related to the mutual position of straight lines in Lobachevsky geometry: parallelism, divergent lines, and orthogonal projection. The study is carried out based on the interpretation of the Cayley-Klein model. It is shown that through a point not lying on a given straight line, infinitely many straight lines can be drawn that do not intersect the given line, among which there exist two limiting parallel lines. It is also established that as the perpendicular distance increases, the angle of parallelism decreases. Moreover, it is proved that, depending on the mutual position of the lines, the projection may take the form of an open ray or an open segment. The obtained results reveal essential differences between Lobachevsky geometry and Euclidean geometry.*

Keywords: *Lobachevsky geometry, hyperbolic plane, parallel lines, angle of parallelism, diverging lines, projection.*

Kirish

Geometriya fani tarixda bir necha bor yangilanish, yasharish jarayonini bosib o‘tgan. Ulardan birinchisi Noyevkilid geometriyasining paydo bo‘lishidir. Lobachevskiy o‘zi ochgan yangi geometrik tushunchalarni “Tasavvurdagi geometriya” deb atalgan.

Shunday insonlar borki, ular aql-zakovati jihatidan o‘zi yashayotgan davrdan ancha ilgarilab ketadi. Zamondoshlari ularni tushunmaydi va ular olg‘a surgan g‘oyalar tan olinmaydi. Shunday olimlardan biri rus matematigi Nikolay Ivanovich Lobachevskiydir.

Adabiyotlar tahlili

Lobachevskiy geometriyasi noyevklid geometriyalarning klassik va eng muhim yo‘nalishlaridan biridir. Bu geometriyada Yevklidning beshinchi postulati o‘rniga unga teng kuchli bo‘lmagan yangi aksiomatik yondashuv olinadi [1,3]. Natijada tekislikdagi to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashuvi, parallellik tushunchasi, masofa va burchaklarga doir ko‘plab xossalar Yevklid geometriyasidagidan tubdan farq qiladi [2].

Ayniqsa, berilgan to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan nuqtadan ushbu chiziqni kesmaydigan bittadan ortiq to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkinligi giperbolik geometriyaning eng xarakterli belgilaridan biri hisoblanadi [4]. Bu parallellik tushunchasining yangi talqinini yuzaga keltiradi hamda masofa va burchaklar orasidagi munosabatlarni qayta ko‘rib chiqishni talab qiladi [5].

Mazkur maqolaning maqsadi Lobachevskiy tekisligida to‘g‘ri chiziqlarning parallellik, uzoqlashuvchi va proyeksiya bilan bog‘liq asosiy xossalarini tartibli va yaxlit ko‘rinishda bayon qilishdir. Bu natijalar ko‘pincha ko‘psonli kichik teoremalarga bo‘linib ketadi, bu esa materialning ichki mantiqini susaytiradi. Shu sababli mazkur xossalar uchta yirik natija atrofda umumlashtirildi.

Ish sof geometrik usulga tayangan holda olib borildi. Zarur joylarda Kelli-Kleyn modelining geometrik talqini qo‘llanildi. Bunda giperbolik tekislik doira ichki nuqtalari bilan, to‘g‘ri chiziqlar esa doira chegarasini kesuvchi vatarlari bilan ifodalanadi [6-9]. Ushbu model chiziqlarning kesishishi, parallellikning chegaraviy holatlari va proyeksiya haqida aniq tasavvur hosil qilish imkonini beradi.

Dastlabki yordamchi faktlar

N.I.Lobachevskiy tomonidan 1826-yili Qozon Universitetida qilingan “Tasavvurdagi geometriya” deb atalgan ma’ruzasi, Yevklidning beshinchi postulatini boshqa aksioma bilan almashtirsa, yangi tushunchalar paydo bo‘lishi, natijada yangi geometriya mavjud ekanligiga bag‘ishlangan edi. Bu aslida Yevklid geometriyasidan farqli, geometriya ya’ni “Noyevklid” geometriya mavjudligini e’tirof etgan.

Afsuski, zamondoshlari bu yangilikning asl mohiyatini tushuna olmadilar. Bu bashoratning asl mohiyatini XIX asrning 60-70-yillariga kelibgina tushunishdi va tan olishdi. Kashfiyot tan olingan davrda esa N.I.Lobachevskiy hayotdan ko‘z yumgan edi.

Tabiiyki, shunday savollar paydo bo‘ladi.

Nega Lobachevskiy geometriyasi zamondoshlari tomonidan tan olinmagan?

Nega Noyevklid geometriyasi deyiladi?

Yevklid aksiomalariga ishonch va hurmatning kuchliligi beshinchi postulatni inkor etish yoki uni boshqa postulat bilan almashtirish kabi fikrlarga yo‘l bermagan. Bir necha taniqli olimlar bu aksioma o‘rniga boshqa aksioma qabul qilinsa, geometriyada yangicha fikrlar paydo bo‘lishini, ya’ni yangicha tushunchalar mavjud bo‘lishini, bu esa yangi geometriya ekanligiga ishonganlar. Ammo, o‘z davrining buyuk matematiklaridan bo‘lgan Gauss ham o‘z tadqiqotlarini ochiq aytishga jur’at qila olmagan.

Lobachevskiy geometriyasining asosini tashkil etuvchi aksiomalar Yevklid geometriyasining aksiomalaridan faqat parallellik aksiomasi bilan farq qiladi. Shuning uchun, Yevklid geometriyasidagi parallellik aksiomasiga asoslanmagan har qanday teorema va tushunchalar Lobachevskiy geometriyasi uchun ham o‘rinlidir.

Ma’lumki, Yevklid geometriyasida parallellik aksiomasi quyidagicha: berilgan to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan nuqta orqali tekislikda berilgan to‘g‘ri chiziqqa bitta va faqat bitta parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

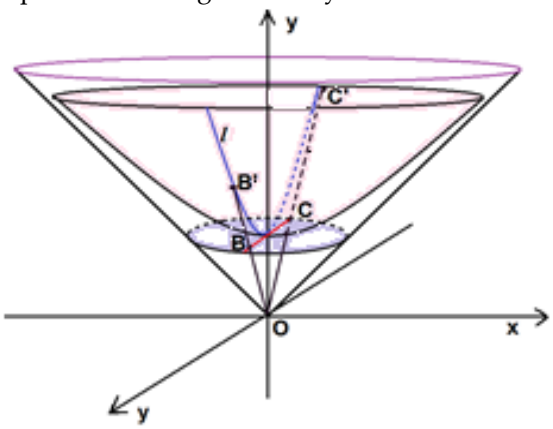
Lobachevskiy geometriyasida parallellik aksiomasi esa: berilgan to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan nuqta orqali shu to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydigan kamida ikkita to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

Yuqoridagi aksiomani tasavvur orqali anglash va tushunish inson uchun shu vaqtgacha egallagan bilimlari yetarli bo‘lmaydi. Ya’ni, biz bilgan tekislik orqali bu aksiomani tasavvur qilib bo‘lmaydi.

Ma’lumki, giperbolani simmetriya o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan shakl ikki pallali giperboloid deb ataladi. Bunda giperbolaning asimptotalaridan aylanma konus sirt hosil bo‘ladi. Bu aylanma konus, giperboloidga asimptotik konus deb ataladi.

Biz Lobachevskiy tekisligi talqinini hosil qilish uchun ikki pallali giperboloidning bir pallasidan foydalanamiz. Bundan so‘ng giperboloid deganda ikki pallali giperboloidning bir pallasini tushunamiz. Tasavvur qilish oson bo‘lishi

uchun, asimptotik konus va giperboloid biror koordinatalar sistemasida berilgan bo'lsin deb hisoblaymiz. Bunda koordinatalar boshi konus uchida, Oz – o'qi esa konusning simmetriya markazida bo'lsin (1-rasm).



1-rasm

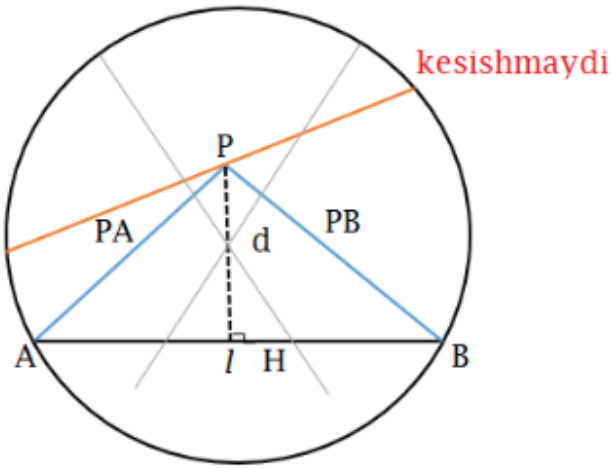
Giperboloidga tegishli bo'lgan nuqtalarni Lobachevsliy tekisligi "nuqta" lari deb qabul qilamiz. Konus uchidan va giperboloidni kesuvchi tekisliklarni o'tkazamiz. Kesimda giperbola hosil bo'ladi. Shuningdek bu tekislik asimptotik konusni ikki yasovchisi bo'yicha kesib o'tadi. Bu yasovchilar kesimda hosil bo'lgan giperbola uchun asimptota bo'ladi. Lobachevskiy tekisligining "to'g'ri chizig'i" – deb giperboloidni konus uchidan o'tuvchi tekislik bilan kesishishidan hosil bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi. Bu chiziq giperboloid ustida yotuvchi giperbola bo'ladi.

Lobachevskiy geometriyasi noyevklid geometriyaning yetarli darajada rivojlangan va ko'pgina fanlar sohalarida qo'llaniladigan bo'limidir. Ammo hozirgi kunda o'zbek tilida bu geometriyaning asosiy tushunchalari bayon etilgan adabiyotlar juda kam, masalalar to'plami esa umuman yo'q. Ushbu maqolada ana shunday masalalar ko'rilgan.

Asosiy natijalar

Teorema 1 (Parallellikning umumiy xossasi). *Lobachevskiy tekisligida berilgan* l *to'g'ri chiziqda yotmaydigan* P *nuqtadan* l *chiziq bilan kesishmaydigan cheksiz ko'p to'g'ri chiziq o'tadi. Ularning orasida aynan ikkita chegaraviysi mavjud bo'lib, ular o'ngdan va chapdan parallel chiziqlar deyiladi. Bundan tashqari, P nuqtadan l chiziqqacha tushirilgan perpendikulyar masofa ortishi bilan parallellik burchagi kamayadi.*

Isbot. Berilgan l to'g'ri chiziq va undan tashqarida yotuvchi P nuqtani olaylik. P nuqtadan l chiziqqa perpendikulyar tushiramiz va uning asosini H bilan belgilaymiz (2-rasm):



2-rasm

$PH \perp l$, $PH = d$.

Lobachevskiy tekisligini Kelli–Kleyn modeli yordamida qaraymiz. Bu modelda giperbolik to'g'ri chiziqlar doira ichidagi vatarlarga mos keladi. Berilgan$l$to'g'ri chiziq modelda doiraning ikki nuqtasini tutashtiruvchi vatar sifatida qaraladi. Bu nuqtalarni A va B deb belgilaymiz.

Endi P nuqtadan o'tuvchi barcha giperbolik to'g'ri chiziqlarni qaraymiz. Modelda ular P nuqtadan o'tuvchi oddiy Evklid to'g'ri chiziqlarining doira ichidagi qismlariga mos keladi.

Shu chiziqlarning ayrimlari $l$vatarni doira ichida kesadi. Bunday chiziqlar Lobachevskiy tekisligida ham l bilan kesishadi. P nuqtadan o'tuvchi va l bilan kesishadigan chiziqlar yo'nalishlari biror ochiq burchak sohasini tashkil qiladi.

Bu kesishuvchi yo‘nalishlar sohasining chegarasida aynan ikkita chiziq hosil bo‘ladi. Ularning biri $l$chiziqning bir uchi A orqali, ikkinchisi esa ikkinchi uchi B orqali o‘tadi. Bu ikki chiziq l bilan tekislik ichida kesishmaydi, lekin mos ravishda l bilan bitta nuqtaga ega bo‘ladi. Shuning uchun ular l ga nisbatan chegaraviy parallel chiziqlar deyiladi.

Demak, P nuqtadan$l$ ga nisbatan aynan ikkita chegaraviy parallel chiziq o‘tadi: biri chap tomondan, ikkinchisi o‘ng tomondan.

Endi chegaraviy parallel chiziqlardan tashqarida joylashgan yo‘nalishlarni olaylik. Bu yo‘nalishlarga mos keluvchi to‘g‘ri chiziqlar l ni tekislik ichida kesmaydi. Bunday yo‘nalishlar bitta yoki ikkita ochiq burchak sohasini tashkil qiladi. Har bir ochiq burchak sohasida esa cheksiz ko‘p yo‘nalish mavjud. Demak, P nuqtadan l bilan kesishmaydigan cheksiz ko‘p to‘g‘ri chiziq o‘tadi.

Shu bilan teoremaning birinchi qismi isbotlandi.

Endi parallellik burchagini qaraymiz. $PH=d$ bo‘lsin. P nuqtadan o‘tuvchi chegaraviy parallel chiziq bilan PH perpendikulyar orasidagi burchak Lobachevskiy geometriyasida parallellik burchagi deyiladi va odatda $\Pi(d)$ bilan belgilanadi. Lobachevskiy geometriyasida parallellik burchagi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$\Pi(d) = 2\,arctan\,e^{-d}$.

Bu formuladan ko‘rinadiki, d ortsa, e^{-d} kamayadi. $arctan\,x$ funksiyasi esa $x > 0$ da o‘suvchi funksiya bo‘lgani uchun e^{-d} kamayganda $arctan\quad e^{-d}$ ham kamayadi. Demak,

$d_1 < d_2 \Rightarrow \Pi(d_1) > \Pi(d_2)$.

Ya’ni P nuqta l chiziqdan uzoqlashgan sari parallellik burchagi kamayadi. Teorema isbotlandi. □

Teorema 2 (Uzoqlashuvchi chiziqlar va umumiy perpendikulyar). *Lobachevskiy tekisligidagi ikki to‘g‘ri chiziq kesishmasa va o‘zaro parallel bo‘lmasa, u holda ular uzoqlashuvchi chiziqlar bo‘ladi. Bunday ikki chiziq uchun yagona umumiy perpendikulyar mavjud bo‘lib, u chiziqlar orasidagi eng qisqa masofani ifodalaydi.*

Isbot. Berilgan ikki to‘g‘ri chiziqni $\boldsymbol{l_1}$ va $\boldsymbol{l_2}$ bilan belgilaymiz. Faraz qilaylik, ular Lobachevskiy tekisligida kesishmaydi va bir-biriga chegaraviy parallel ham emas. Bu degani, ular na tekislik ichida umumiy nuqtaga ega, na cheksizlikdagi bitta umumiy nuqtaga ega.

Avvalo, atamalarning ma’nosini aniqlab olamiz. Lobachevskiy tekisligida ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro joylashuvi uch xil bo‘ladi:

1) agar ular tekislik ichida bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, ular kesishuvchi chiziqlar deyiladi;

2) agar ular tekislik ichida kesishmasa, lekin cheksizlikda bitta umumiy ideal nuqtaga ega bo‘lsa, ular chegaraviy parallel chiziqlar deyiladi;

3) agar ular tekislik ichida ham kesishmasa va cheksizlikda ham umumiy ideal nuqtaga ega bo‘lmasa, ular uzoqlashuvchi chiziqlar deyiladi.

Shuning uchun teoremaning birinchi jumlasi, ya’ni berilgan chiziqlarning uzoqlashuvchi chiziqlar ekanligi, aynan shu tasnifdan kelib chiqadi.

Endi umumiy perpendikulyarning mavjudligi va yagonaligini aniq ko‘rsatamiz. Buning uchun Puankare yuqori yarim tekislik modelidan foydalanamiz. Bu modelda Lobachevskiy tekisligi quyidagi soha orqali tasvirlanadi:

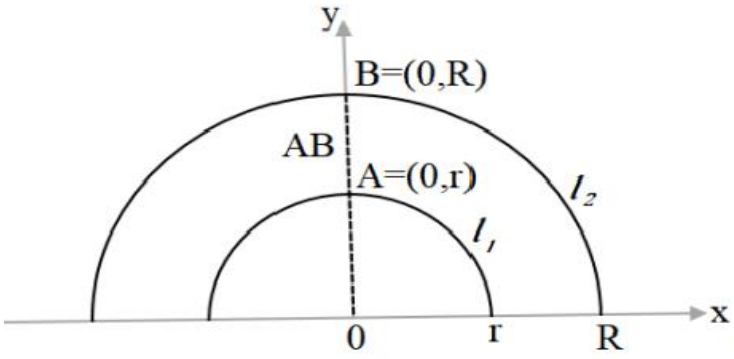
$$\mathbb{H}^2 = \{(x,y) : y > 0\}, \quad ds^2 = \frac{(dx^2 + dy^2)}{y^2}$$

Bu modelda giperbolik to‘g‘ri chiziqlar chegaraviy to‘g‘ri chiziq $y = 0$ ga tik bo‘lgan Evklid yarim aylanalari yoki vertikal nurlar ko‘rinishida bo‘ladi. Model uchun unda burchaklar odatdagi Evklid burchaklari kabi o‘lchanadi.

Giperbolik to‘g‘ri chiziqlarni to‘g‘ri chiziqlarga, perpendikulyarlikni esa perpendikulyarlikka o‘tkazadi. Shuning uchun umumiylikni yo‘qotmasdan, l_1 va l_2 uzoqlashuvchi chiziqlarni quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin:

$$\ell_1 : x^2 + y^2 = r^2, \quad \ell_2 : x^2 + y^2 = R^2, \quad 0 < r < R.$$

Ya’ni l_1 va l_2 markazi koordinata boshida joylashgan ikkita konsentrik yarim aylana bo‘ladi. Bu ikki yarim aylana yuqori yarim tekislik ichida kesishmaydi va $y = 0$ chegarada umumiy nuqtaga ham ega emas. Demak, ular uzoqlashuvchi chiziqlarning modeldagi ko‘rinishidir (3-rasm).



3-rasm

Endi $x = 0$ vertikal to‘g‘ri chiziqni olaylik. U Puankare modelida ham giperbolik to‘g‘ri chiziqdir. Bu chiziq l_1 ni $A = (O, r)$ nuqtada, l_2 ni esa $B = (O, R)$ nuqtada kesadi. Evklid ma’noda $x = 0$vertikal chiziq har ikkala konsentrik yarim aylanaga ularning eng yuqori nuqtalarida tik tushadi. Model uchun bu tiklik giperbolik ma’noda ham saqlanadi. Shunday qilib, AB kesma l_1 va l_2 uchun umumiy perpendikulyar bo‘ladi.

Endi shu umumiy perpendikulyar eng qisqa masofani berishini isbotlaymiz. l_1 dan l_2 ga boruvchi ixtiyoriy silliq egri chiziqni $\sigma(t) = (\rho(t), \theta(t))$ deb olaylik. Bu yerda qutb koordinatalari:

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta.$$

l_1 dan l_2 ga o‘tish degani ϱ qiymati r dan R gacha o‘zgaradi. Puankare metrikasida egri chiziq uzunligi uchun quyidagi baho olinadi:

$$L(\sigma) = \int \sqrt{\frac{(\rho'^2 + \rho^2\theta'^2)}{(\rho \sin\theta)}}\, dt \geq \int \frac{|\rho'|}{\rho}\, dt \geq ln\left(\frac{R}{r}\right)..$$

Bu yerda $sin\,\theta \leq 1$ ekanligi va $\sqrt{(\rho'^2 + \rho^2\theta'^2)} \geq |\rho'|$ tengsizliklari ishlatildi. Demak, l_1 va l_2 ni tutashtiruvchi har qanday egri chiziqning uzunligi kamida $ln\left(\frac{R}{r}\right)$ ga teng.

Aynan $x = 0$ chiziq bo‘ylab, ya’ni $\theta = \frac{\pi}{2}$ bo‘lganda, yuqoridagi tengsizlikda tenglik bajariladi. Bu holda AB kesmaning uzunligi

$$|AB| = \int_r^R \frac{d\rho}{\rho} = ln\left(\frac{R}{r}\right)$$

bo‘ladi. Shuning uchun AB kesma l_1 va l_2 orasidagi eng qisqa masofani beradi.

Endi yagonalikni isbotlaymiz. Faraz qilaylik, l_1 va l_2 uchun yana bir umumiy perpendikulyar mavjud bo‘lsin. Puankare yuqori yarim tekislik modelida bunday chiziq ham $y = 0$ chegaraga tik bo‘lgan yarim aylana yoki vertikal chiziq bo‘lishi kerak.

Agar u vertikal chiziq bo‘lsa, konsentrik yarim aylanalarga bir vaqtda tik tushishi uchun u faqat $x = 0$ chiziq bo‘lishi mumkin. Chunki $x = c$ vertikal chiziq $x^2 + y^2 = r^2$ aylanasini tik kesishi uchun kesishish nuqtasida $c = 0$ bo‘lishi zarur. Demak, vertikal holatda umumiy perpendikulyar yagona bu $x = 0$ chiziq.

Agar umumiy perpendikulyar yarim aylana bo‘lsa, uning markazi $y = 0$ chegarada yotadi. Aytaylik, uning tenglamasi $(x - a)^2 + y^2 = s^2$ bo‘lsin. Bu yarim aylana $x^2 + y^2 = r^2$ va $x^2 + y^2 = R^2$ aylanalarning har ikkalasiga tik bo‘lishi kerak. Ikki aylananing tik kesishish sharti markazlar orasidagi masofa kvadrati radiuslar kvadratlari yig‘indisiga teng bo‘lishidir. Shuning uchun bir vaqtda

$$a^2 = s^2 + r^2, \quad a^2 = s^2 + R^2$$

tengliklari bajarilishi kerak. Bundan $r^2 = R^2$ kelib chiqadi. Bu esa $0 < r < R$ shartiga zid. Demak, yarim aylana ko‘rinishidagi boshqa umumiy perpendikulyar mavjud emas.

Shunday qilib, uzoqlashuvchi ikki to‘g‘ri chiziq uchun umumiy perpendikulyar mavjud, u yagona va aynan shu kesma chiziqlar orasidagi eng qisqa masofani ifodalaydi. Teorema isbotlandi. □

Teorema 3 (Proyeksiya xossasi). *Lobachevskiy tekisligida ikki kesishmaydigan to‘g‘ri chiziqdan birining ikkinchisiga ortogonal proyeksiyasi ularning o‘zaro joylashuviga bog‘liq:*

a) Agar chiziqlar uzoqlashuvchi bo‘lsa, proyeksiya ochiq kesma bo‘ladi;

b) *Agar chiziqlar parallel bo‘lsa, proyeksiya ochiq nur bo‘ladi.*

Isbot. Teorema isbotni aniq va tushunarli qilish uchun Puankarening yuqori yarim tekislik modelidan foydalanamiz. Bu modelda giperbolik tekislik quyidagicha olinadi:

$$\mathbb{H} = \{(x, y) : y > 0\}$$

Bu modelda giperbolik to‘g‘ri chiziqlar vertikal Evklid to‘g‘ri chiziqlari, yoki $\mathbb{H} = \{(x, y) : y > 0\}$o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan Evklid yarim aylanalari orqali tasvirlanadi. Model uchun burchaklar saqlanadi, ya’ni giperbolik perpendikulyarlik Evklid perpendikulyarligi orqali ko‘rinadi.

Ikkita to‘g‘ri chiziqning o‘zaro joylashuvini o‘zgartirmasdan, izometriya yordamida proyeksiya olinadigan chiziqni quyidagi vertikal chiziq deb olish mumkin:

$$\ell = \{(O, t) : t > 0\}$$

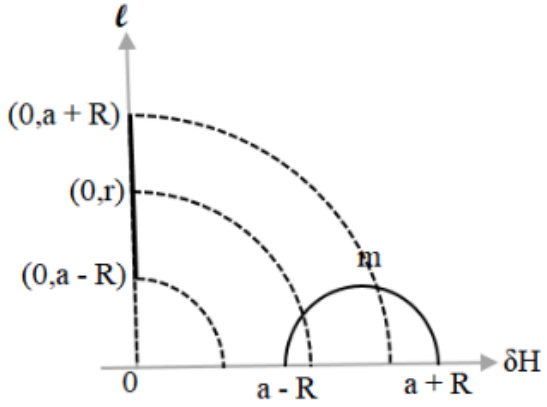
Shu chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan barcha giperbolik to‘g‘ri chiziqlar Puankare modelida markazi koordinatalar boshida joylashgan Evklid yarim aylanalari ko‘rinishida bo‘ladi:

$x^2 + y^2 = r^2, \ r > 0$

Bunday yarim aylana l chiziqni (O, r) nuqtada perpendikulyar kesadi. Demak, biror nuqtaning l ga ortogonal proyeksiyasini topish uchun shu nuqtadan o‘tuvchi $x^2 + y^2 = r^2$ yarim aylana olinadi; uning l bilan kesishgan (O, r) nuqtasi proyeksiya nuqtasi bo‘ladi.

1-hol. Chiziqlar uzoqlashuvchi bo‘lsin.

l bilan kesishmaydigan va unga parallel ham bo‘lmagan ikkinchi chiziqni m bilan belgilaymiz. Koordinatalarni qulay tanlash orqali m ni quyidagi Evklid yarim aylanasi ko‘rinishida yozish mumkin (4-rasm):



4-rasm

$$(x - a)^2 + y^2 = R^2, \quad a > R > 0.$$

Bu shart m chiziqning ikkala uchi l chiziqning uchlaridan farqli ekanini bildiradi. Haqiqatan, $m$ning uchlari $\mathbb{H} = \{(x, y) : y > 0\}$ o‘qida $a - R$ va $a + R$ nuqtalarda yotadi, l ning uchlari esa 0 va 0 dir. Shu sababli l va m kesishmaydi hamda umumiy nuqtaga ega emas; demak, ular uzoqlashuvchi chiziqlardir.

Endi m chiziqning l ga ortogonal proyeksiyasini aniqlaymiz. l ga perpendikulyar bo‘lgan chiziqlar $x^2 + y^2 = r^2$ ko‘rinishidagi yarim aylanalardir. Bunday yarim aylana m bilan ichki nuqtada kesishishi uchun ikki Evklid aylanasining kesishish sharti bajarilishi kerak. Markazlari orasidagi masofa a, radiuslari esa r va R bo‘lgan ikki aylana ichki nuqtada kesishishi uchun

$$\{(0, r) : a - R < r < a + R\}$$

bo‘lishi zarur va yetarlidir. Agar $r = a - R$ yoki $r = a + R$ bo‘lsa, aylana m bilan faqat chegarada urinadi; bu nuqtalar Lobachevskiy tekisligiga kirmaydi. Shuning uchun proyeksiyada chegara nuqtalar hosil bo‘lmaydi.

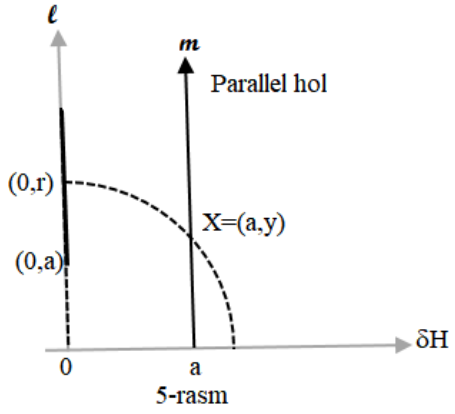
Demak, m chiziqning l ga proyeksiyasi quyidagi to‘plamdan iborat bo‘ladi:

$$\{(O, r) : a - R < r < a + R\}$$

Bu l chiziq ustidagi ikkita chegaraviy nuqta orasidagi oraliq bo‘lib, chegaraviy nuqtalarning o‘zi unga kirmaydi. Shuning uchun uzoqlashuvchi chiziqlar holida ortogonal proyeksiya ochiq kesma bo‘ladi.

2-hol. Chiziqlar parallel bo‘lsin.

Endi m chiziq l bilan bitta ideal nuqtaga ega bo‘lsin. Masalan, ular 0 nuqtada parallel bo‘lsin. Bunday holni modelda quyidagi vertikal geodezik bilan tasvirlash mumkin (5-rasm):



5-rasm

$$m = \{(a,t) : t > 0\}, \quad a > 0.$$

m chiziqdagi ixtiyoriy $X = (a,y)$ nuqtani olaylik. X nuqtadan l ga perpendikulyar giperbolik chiziq markazi koordinatalar boshida bo'lgan yarim aylana bo'ladi. Uning radiusi

$$r = \sqrt{(a^2 + y^2)}$$

ga teng. Shuning uchun X nuqtaning l dagi proyeksiyasi (O,r) bo'ladi. $y > 0$ bo'lgani uchun

$$r > a.$$

Aksincha, agar $r > a$ bo'lsa, $y = \sqrt{(r^2 - a^2)}$ musbat son bo'ladi va (a,y) nuqta m chiziqda yotadi. Demak, l ustidagi har bir (O,r), $r > a$ nuqta m ning biror nuqtasining ortogonal proyeksiyasi bo'ladi.

Shunday qilib, parallel chiziqlar holida proyeksiya quyidagi to'plamdan iborat:

$$\{(O,r): r > a\}$$

Bu l chiziq ustida bitta tomonga cheksiz davom etuvchi, lekin boshlang'ich chegaraviy nuqtasini o'z ichiga olmaydigan to'plamdir. Demak, u ochiq nurdir.

Uzoqlashuvchi chiziqlar holida ikkinchi chiziqning ikkala uchi proyeksiya olinayotgan chiziqning uchlaridan ajralgan bo'ladi. Shu sababli proyeksiya ikki tomondan chekli chegaraga ega bo'lib, ochiq kesma hosil qiladi. Parallel chiziqlar holida esa chiziqlar bitta nuqtaga ega bo'ladi; shu sababli proyeksiya bir tomonga cheksiz davom etadi va ochiq nur hosil qiladi.

Demak, Lobachevskiy tekisligida ortogonal proyeksiyaning shakli chiziqlarning o'zaro joylashuvini aniq aks ettiradi: uzoqlashuvchi holatda proyeksiya ochiq kesma, parallel holatda esa ochiq nur bo'ladi. Teorema isbotlandi. □

Xulosa

Olingan natijalar Lobachevskiy geometriyasining Yevklid geometriyasidan farqli jihatlarini yaqqol ochib beradi. Ayniqsa, parallellikning yagona emasligi, masofa ortishi bilan parallellik burchagining kamayishi va kesishmaydigan chiziqlarning turlicha klassifikatsiyasi giperbolik fazoning ichki tabiatini chuqurroq tushunishga yordam beradi. Ushbu maqola noyevklid geometriya bo'yicha maxsus kurslar, seminar mashg'ulotlari va ilmiy-uslubiy ma'ruzalar uchun qulay nazariy asos bo'lib xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Lobachevsky, N. I. *Pangeometry*. Moscow, 1956.

2. Coxeter, H. S. M. *Non-Euclidean Geometry*. Toronto: University of Toronto Press, 1965.

3. Greenberg, M. J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. 4th ed. New York: W. H. Freeman, 2008.

4. Anderson, J. W. *Hyperbolic Geometry*. 2nd ed. London: Springer, 2005.

5. Ratcliffe, J. G. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. 2nd ed. New York: Springer, 2006.

6. Klein, F. *On the so-called Non-Euclidean Geometry*. 1871.

7. Cannon, J. W., Floyd, W. J., Kenyon, R., Parry, W. R. *Hyperbolic geometry*. In: *Flavors of Geometry*. Cambridge University Press, 1997, pp. 59–115.

8. Artikbayev A., Berdiyeva O. *Tasavvurdagi geometriya*. – T.: "Fizika, matematika va informatika" jurnali, 2011 yil 3-son.

9. Mamadaliyev B. *Geometriya fanining nazariy asoslari*. O'quv qo'llanma. Farg'ona davlat universiteti, 2025-yil, 156-bet.