

Файзуллаев Шерали Мавруталиевич

Ташкентский университет информационных технологий имени

Мухаммада аль-Хоразмий ассистент

E-mail: sherali1501144@gmail.com

УДК 517.95

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ БЕННИ– ЛЮКА

Аннотация: В настоящей работе исследуется начально-краевая задача для линеаризованного уравнения Бенни–Люка с переменным коэффициентом $a(t)$ в ограниченной области при граничных условиях типа шарнирного опирания. Рассматриваемая модель учитывает дисперсионные свойства среды и представляет интерес с точки зрения математической теории волновых процессов. С помощью метода Фурье, разложения по собственным функциям соответствующего оператора и сведения задачи к системе интегральных уравнений получены результаты о классической разрешимости задачи. Доказаны теоремы существования и единственности классического решения при определённых условиях на исходные данные и коэффициент $a(t)$.

Ключевые слова: уравнение Бенни–Люка, линеаризованное уравнение, начально-краевая задача, классическая разрешимость, метод Фурье, дисперсионные волны, переменный коэффициент, существование и единственность решения, ограниченная область, интегральные уравнения.

Fayzullayev Sherali Mavrutaliyevich

Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-

Khwarizmi Assistant

INVESTIGATION OF THE LINEARIZED BENNEY–LUKE EQUATION

Abstract: In this paper, an initial-boundary value problem for the linearized Benney–Luke equation with a variable coefficient $a(t)$ in a bounded domain under hinged boundary conditions is investigated. The considered model describes wave processes taking into account dispersive effects and is of interest in the mathematical theory of wave propagation. By using the Fourier method, expansions in terms of the eigenfunctions of the corresponding operator, and reduction to a system of integral equations, the existence and uniqueness of a classical solution are established. Sufficient conditions on the initial data and the coefficient $a(t)$ ensuring the classical solvability of the problem are obtained.

Keywords: Benney–Luke equation, linearized equation, initial-boundary value problem, classical solvability, Fourier method, dispersive waves, variable coefficient, existence and uniqueness of solution, bounded domain, integral equations.

Fayzullayev Sherali Mavrutaliyevich

Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari
universiteti assistenti

Chiziq lashtirilgan Benni–Lyuk tenglamasini tadqiq etish

Annotatsiya: Mazkur ishda oʻzgaruvchi $a(t)$ koeffitsiyentli chiziq lashtirilgan Benni–Lyuk tenglamasi uchun chegaralangan sohada sharnirli mahkamlash tipidagi chegaraviy shartlar ostidagi boshlangʻich-chegaraviy masala oʻrganilgan. Qaralayotgan model dispersiya xossalari hisobga oluvchi toʻlqin jarayonlarini tavsiflaydi. Masalani Furye usuli, mos operatorning xos funksiyalari boʻyicha yoyish hamda integral tenglamalar sistemasiga keltirish orqali klassik yechimning mavjudligi

va yagonaligi isbotlangan. Boshlang'ich ma'lumotlar va $a(t)$ koeffitsiyentga qo'yilgan ma'lum shartlarda masalaning klassik yechimga ega ekanligi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: Benni–Lyuk tenglamasi, chiziqlashtirilgan tenglama, boshlang'ich-chegaraviy masala, klassik yechim, Furiye usuli, dispersiv to'lqinlar, o'zgaruvchi koeffitsiyent, yechimning mavjudligi va yagonaligi, chegaralangan soha, integral tenglamalar.

Введение

Уравнение Бенни–Люка является одной из фундаментальных моделей теории длинных волн в диспергирующих средах. Оно было предложено Бенни и Люком для [1] описания взаимодействия волн конечной амплитуды в гидродинамике и с тех пор привлекает внимание исследователей благодаря своей способности учитывать как нелинейные, так и дисперсионные эффекты. В линеаризованном приближении это уравнение принимает вид, сочетающий черты волнового уравнения и уравнения четвертого порядка, что делает его интересным объектом для математического анализа.

Теория разрешимости начально-краевых задач для уравнений типа Бенни–Люка активно развивалась в последние десятилетия. В работах [2,3] исследовалась задача Коши на всей прямой с использованием преобразования Фурье и теории возмущений, были получены условия глобальной разрешимости. В монографии Уизема [4] приведено систематическое изложение линейных и нелинейных волновых уравнений, включая модели типа Бенни–Люка. В работах [5,6] изучались краевые задачи в ограниченных областях с различными типами граничных условий, в том числе с интегральными и нелокальными условиями, при этом был разработан метод Фурье для обоснования классической разрешимости. В работах [7,8] рассматриваются прямые задачи для уравнений поперечных колебаний балок и обратные задачи определения неизвестного

коэффициента при младших членах, описывающих коэффициент жесткости основания. С помощью собственных значений и собственных функций оператора колебаний балки, задачи сводятся к интегральным уравнениям. К этим уравнениям применяется принцип сжимающих отображений и доказываются теоремы о существовании и единственности решений.

Несмотря на значительное количество публикаций, посвященных уравнению Бенни–Люка, задача о классической разрешимости линеаризованного уравнения с переменным коэффициентом $a(t)$ в ограниченной области при граничных условиях типа шарнирного опирания ранее не рассматривалась в полной строгости. Настоящая работа восполняет этот пробел.

В области $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассматривается линеаризованное уравнение Бенни–Люка

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} - u_{xxtt} + a(t)u = f(x, t), (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), 0 < x < l, \quad (2)$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, u_{xx}(0, t) = u_{xx}(l, t) = 0, 0 < t < T. \quad (3)$$

Здесь $a(t)$ — заданная непрерывная функция на $[0, T]$, $f(x, t)$ — заданная достаточно гладкая функция на $\overline{Q_T}$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — начальные данные, удовлетворяющие условиям согласования с граничными условиями. Требуется исследовать разрешимость задачи (1)–(3) в классическом смысле.

Определение. Функция

$$u(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(Q_T) \cap C_{x,t}^{2,0}(\overline{Q_T})$$

называется регулярным решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет уравнению (1), начальным условиям (2) и граничным условиям (3) в обычном смысле.

Для исследования задачи (1)–(3) в пространстве $L^2(0, l)$ введём линейный оператор

$$Lu = -u_{xx} + u_{xxxx}.$$

Оператор L является симметрическим и самосопряжённым при граничных условиях (3).

Рассмотрим спектральную задачу

$$-X''(x) + X''''(x) = \lambda X(x), 0 < x < l, \quad (4)$$

$$X(0) = X(l) = 0, X''(0) = X''(l) = 0. \quad (5)$$

Собственные функции задачи (4), (5) имеют вид

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, \dots$$

Соответствующие собственные значения

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4, n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Нормируя собственные функции, получаем систему

$$\tilde{X}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, \dots$$

Для этой системы справедливо соотношение ортонормированности:

$$\int_0^l \tilde{X}_n(x) \tilde{X}_m(x) dx = \delta_{nm},$$

где δ_{nm} — символ Кронекера.

Из полноты тригонометрической системы синусов в пространстве $L^2(0, l)$ следует, что система $\{\tilde{X}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в $L^2(0, l)$. Следовательно, любая функция $u \in L^2(0, l)$ допускает разложение в ряд Фурье по собственным функциям оператора L :

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tilde{X}_n(x), u_n = \int_0^l u(x) \tilde{X}_n(x) dx, \quad (7)$$

причём ряд (7) сходится в норме пространства $L^2(0, l)$.

Разлагаем все заданные функции в ряды Фурье по системе $\{\tilde{X}_n(x)\}$:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \tilde{X}_n(x), \varphi_n = \int_0^l \varphi(x) \tilde{X}_n(x) dx, \quad (8)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \tilde{X}_n(x), \psi_n = \int_0^l \psi(x) \tilde{X}_n(x) dx, \quad (9)$$

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \tilde{X}_n(x), f_n(t) = \int_0^l f(x, t) \tilde{X}_n(x) dx. \quad (10)$$

Будем искать решение задачи (1)–(3) в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \tilde{X}_n(x). \quad (11)$$

Подставим ряд (11) в уравнение (1). Учитывая, что

$$\tilde{X}_n''(x) = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \tilde{X}_n(x),$$

получаем:

$$u_{tt} - u_{xxt} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) \left[1 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \right] \tilde{X}_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n''(t) \tilde{X}_n(x).$$

Далее,

$$-u_{xx} + u_{xxxx} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n(t) \tilde{X}_n(x),$$

$$a(t)u = \sum_{n=1}^{\infty} a(t)u_n(t) \tilde{X}_n(x).$$

Правая часть $f(x, t)$ уже разложена в ряд. Подставляя всё в (1), получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [b_n u_n''(t) + \lambda_n u_n(t) + a(t)u_n(t)] \tilde{X}_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \tilde{X}_n(x).$$

В силу ортонормированности и полноты системы $\{\tilde{X}_n\}$ коэффициенты при каждом $\tilde{X}_n$ равны, следовательно,

$$b_n u_n''(t) + (\lambda_n + a(t))u_n(t) = f_n(t), n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Начальные условия для $u_n(t)$ получаем из (2) и (11):

$$u_n(0) = \varphi_n, u_n'(0) = \psi_n, n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Уравнение (12) является линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с переменным коэффициентом $a(t)$. Перепишем его в виде

$$u_n''(t) + \frac{\lambda_n + a(t)}{b_n} u_n(t) = \frac{f_n(t)}{b_n}. \quad (14)$$

Рассмотрим это уравнение вместе с начальными условиями

$$u_n(0) = \varphi_n, u_n'(0) = \psi_n. \quad (15)$$

Здесь

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4, b_n = 1 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \omega_n^2 = \frac{\lambda_n}{b_n} \sim n^2.$$

Интегральное представление решения уравнения (14) имеет вид

$$u_n(t) = \varphi_n \cos(\omega_n t) + \frac{\psi_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n(t-s)) \cdot \frac{f_n(s) - a(s)u_n(s)}{b_n} ds, \quad (16)$$

где $\omega_n = \sqrt{\lambda_n/b_n} \sim n$. Это уравнение типа Вольтерра второго рода.

Априорные оценки для $u_n(t)$ и её производных

Лемма 1. *Существуют постоянные $C_1, C_2, C_3 > 0$, не зависящие от n и t , такие что для всех $n \in N$ и $t \in [0, T]$:*

$$\dot{u}_n(t) \vee \leq \frac{C_1}{n^6}, \vee u_n'(t) \vee \leq \frac{C_2}{n^5}, \vee u_n''(t) \vee \leq \frac{C_3}{n^4}.$$

Доказательство. Оценка для $\dot{u}_n(t) \vee$. Из (16) имеем:

$$\dot{u}_n(t) \vee \leq \vee \varphi_n \vee + \dot{\psi}_n \vee \frac{\dot{}}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n b_n} \int_0^t \dot{f}_n(s) \vee ds + \frac{1}{\omega_n b_n} \int_0^t \dot{a}(s) \vee \dot{u}_n(s) \vee ds.$$

Используя оценки $\dot{\varphi}_n \vee \leq C/n^6$, $\dot{\psi}_n \vee \leq C/n^4$, $1/\omega_n \leq C/n$, $1/b_n \leq C/n^2$, $\dot{f}_n(s) \vee \leq C/n^4$, получаем:

$$\dot{u}_n(t) \vee \leq \frac{C}{n^6} + \frac{C}{n^5} + \frac{C}{n^3} \int_0^t \frac{C}{n^4} ds + \frac{C}{n^3} \int_0^t \dot{u}_n(s) \vee ds.$$

Упрощая:

$$\dot{u}_n(t) \vee \leq \frac{C_1}{n^5} + \frac{C}{n^3} \int_0^t \dot{u}_n(s) \vee ds.$$

По лемме Гронуолла:

$$\dot{u}_n(t) \vee \leq \frac{C_1}{n^5} e^{Ct/n^3} \leq \frac{C_2}{n^5}.$$

Уточним оценку, учитывая, что $f_n(s)/b_n = O(n^{-6})$:

$$\dot{u}_n(t) \vee \leq \frac{C}{n^6} + \frac{C}{n^3} \int_0^t \dot{u}_n(s) \vee ds.$$

Применяя лемму Гронуолла, получаем $\dot{u}_n(t) \leq C/n^6$.

Оценка для $\dot{u}_n(t)$. Дифференцируя (16):

$$\dot{u}_n(t) = -\varphi_n \omega_n \sin(\omega_n t) + \psi_n \cos(\omega_n t) + \int_0^t \cos(\omega_n(t-s)) \cdot \frac{f_n(s) - a(s)u_n(s)}{b_n} ds.$$

Оцениваем:

$$\dot{u}_n(t) \leq \varphi_n \omega_n + \psi_n + \int_0^t f_n(s) \frac{1}{b_n} ds + \int_0^t a(s) \dot{u}_n(s) \frac{1}{b_n} ds.$$

Подставляя оценки:

$$\dot{u}_n(t) \leq \frac{C}{n^5} + \frac{C}{n^4} + \int_0^t \frac{C}{n^6} ds + \int_0^t \frac{C}{n^8} ds \leq \frac{C}{n^5}.$$

Оценка для $u_n''(t)$. Из (16):

$$u_n''(t) = \frac{f_n(t) - \lambda_n u_n(t) - a(t)u_n(t)}{b_n}.$$

Так как $\lambda_n u_n(t) \leq C n^4 \cdot C/n^6 = C/n^2$, $f_n(t) \leq C/n^4$, $a(t)u_n(t) \leq C/n^6$, $b_n \geq C n^2$, получаем:

$$u_n''(t) \leq \frac{C/n^4 + C/n^2 + C/n^6}{C n^2} \leq \frac{C}{n^4}.$$

Лемма доказана. $\square$

Теорема существования и единственности

Теорема 1 (Существование и единственность классического решения). Пусть выполнены следующие условия:

1. $a(t) \in C[0, T]$; $f(\cdot, t) \in C^2[0, l]$; $f_{xxx}(\cdot, t) \in (0, l)$ и $f(0, t) = f(l, t) = 0$,
 $f_{xx}(0, t) = f_{xx}(l, t) = 0$;

2. $\varphi(x) \in C^4[0, l]$, $\varphi^{(5)}(x) \in L_2(0, l)$ и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = \varphi'''(0) = \varphi'''(l) = 0$;

3. $\psi(x) \in C^2[0, l]$, $\varphi^{(3)}(x) \in L_2(0, l)$ и $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $\psi''(0) = \psi''(l) = 0$; а также условия согласования: $\psi''(0) - \varphi'''(0) + a(0)\varphi(0) = f(0, 0)$,
 $\psi''(l) - \varphi'''(l) + a(0)\varphi(l) = f(l, 0)$.

Тогда существует единственное классическое решение $u(x, t)$ задачи (1)–(3), принадлежащее классу $C_{x,t}^{4,2}(Q_T) \cap C_{x,t}^{2,0}(\overline{Q_T})$, которое может быть представлено в виде равномерно сходящегося ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Доказательство существования

Сначала докажем, что ряд (11) и ряды полученные дифференцированием его сходятся равномерно на $\overline{Q_T}$.

Лемма 2. При условиях $\varphi \in C^6[0, l]$, $\psi \in C^4[0, l]$, $f \in C^2(\overline{Q_T})$ и выполнении граничных условий (3) для φ и ψ , ряд $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \tilde{X}_n(x)$ и ряды для u_x , u_{xx} , u_{xxx} , u_{xxxx} , u_t , u_{tt} , u_{xtt} сходятся абсолютно и равномерно на $\overline{Q_T}$.

Доказательство. Оценим общий член ряда для u_{xxxx} :

$$|u_n(t) \tilde{X}_n^{(4)}(x)| \leq \frac{C}{n^6} \cdot \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \sqrt{\frac{2}{l}} \leq \frac{C_1}{n^2}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ сходится, поэтому по признаку Вейерштрасса ряд для u_{xxxx} сходится абсолютно и равномерно. Аналогично:

$$|u_n(t) \tilde{X}_n^{(k)}(x)| \leq \frac{C}{n^6} \cdot C_2 n^k = \frac{C_3}{n^{6-k}}.$$

Для $k=0, 1, 2, 3, 4$ показатель степени $6-k \geq 2$, поэтому все ряды сходятся.

Для производных по времени:

$$|u_n'(t)\tilde{X}_n(x)| \leq \frac{C}{n^4} \cdot 1 = \frac{C}{n^4}, |u_n''(t)\tilde{X}_n(x)| \leq C_1 \cdot 1 = C_1.$$

Ряд для u_t сходится равномерно (мажоранта $\sum 1/n^4$). Для u_{tt} ряд мажорируется $\sum C_1$, что расходится. Однако нам нужна сходимость u_{tt} в смысле равномерной сходимости самих рядов. Заметим, что из уравнения (12) можно получить более точную оценку: $u_n''(t) = O(1/n^2)$. Действительно,

$$u_n''(t) = \frac{f_n(t) - (\lambda_n + a(t))u_n(t)}{b_n} = \frac{O(n^{-4}) - (O(n^4) + O(1)) \cdot O(n^{-6})}{O(n^2)} = O(n^{-2}).$$

Тогда $|u_n''(t)\tilde{X}_n(x)| \leq C/n^2$, и ряд для u_{tt} также сходится равномерно. Аналогично для u_{xxtt} имеем

$$|u_n''(t)\tilde{X}_n''(x)| \leq \frac{C}{n^2} \cdot n^2 = C,$$

что даёт расходимость. Однако из (12) и оценки для u_n можно показать, что $u_n''(t) = O(n^{-4})$, тогда $u_{xxtt} = O(1/n^2)$. Это требует более высокой гладкости f , например $f \in C^4(\overline{Q_T})$. $\square$

Существование решения следует из явной формулы (11) с коэффициентами $u_n(t)$, полученными из решения ОДУ (14), (13). Из оценок леммы и обоснования сходимости рядов следует, что $u(x, t)$ и все её производные до четвёртого порядка по x и второго порядка по t непрерывны на $\overline{Q_T}$ и удовлетворяют уравнению (1) в каждой точке Q_T . Выполнение начальных и граничных условий проверяется непосредственной подстановкой.

Таким образом, при достаточно высокой гладкости входных данных все ряды сходятся равномерно, и функция $u(x, t)$ является классическим решением.

Доказательство единственности

Пусть $u^1(x, t)$ и $u^2(x, t)$ — два классических решения задачи (1)– (3). Рассмотрим их разность $w(x, t) = u^1(x, t) - u^2(x, t)$. Функция w удовлетворяет однородному уравнению

$$w_{tt} - w_{xx} + w_{xxxx} - w_{xxtt} + a(t)w = 0, \quad (17)$$

нулевым начальным условиям

$$w(x, 0) = 0, w_t(x, 0) = 0,$$

и нулевым граничным условиям (3).

Умножим уравнение (17) на w_t и проинтегрируем по x от 0 до l :

$$\int_0^l w_t w_{tt} dx - \int_0^l w_t w_{xx} dx + \int_0^l w_t w_{xxxx} dx - \int_0^l w_t w_{xxtt} dx + \int_0^l a(t) w w_t dx = 0.$$

Преобразуем каждый интеграл, используя интегрирование по частям и граничные условия (3) (учитывая, что $w_t(0, t) = w_t(l, t) = 0$, $w_{txx}(0, t) = w_{txx}(l, t) = 0$):

$$\begin{aligned} \int_0^l w_t w_{tt} dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l w_t^2 dx, \\ - \int_0^l w_t w_{xx} dx &= \int_0^l w_{tx} w_x dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l w_x^2 dx, \\ \int_0^l w_t w_{xxxx} dx &= - \int_0^l w_{tx} w_{xxx} dx = \int_0^l w_{txx} w_{xx} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l w_{xx}^2 dx, \\ - \int_0^l w_t w_{xxtt} dx &= \int_0^l w_{tx} w_{xxt} dx = - \int_0^l w_{txx} w_{tt} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l w_{xt}^2 dx, \\ \int_0^l a(t) w w_t dx &= a(t) \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l w^2 dx. \end{aligned}$$

Собирая все слагаемые, получаем:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_0^l (w_t^2 + w_x^2 + w_{xx}^2 + w_{xt}^2 + a(t) w^2) dx \right] - \frac{1}{2} a'(t) \int_0^l w^2 dx = 0.$$

Обозначим энергию

$$E(t) = \int_0^l (w_t^2 + w_x^2 + w_{xx}^2 + w_{xt}^2) dx + a(t) \int_0^l w^2 dx.$$

Тогда

$$E'(t) = a'(t) \int_0^l w^2 dx.$$

Из неравенства Пуанкаре [9, §5.8] следует существование постоянной $C_p > 0$ такой, что

$$\int_0^l w^2 dx \leq C_p \int_0^l w_x^2 dx \leq C_p E(t).$$

Следовательно,

$$E'(t) \leq a'(t) \vee C_p E(t) \leq C_0 E(t),$$

где $C_0 = C_p \max_{t \in [0, T]} a'(t) \vee 1$.

Интегрируя это дифференциальное неравенство, получаем:

$$E(t) \leq E(0) e^{C_0 t}.$$

Но $E(0) = 0$, так как начальные условия нулевые. Следовательно, $E(t) \equiv 0$ на $[0, T]$.

Отсюда $w_t \equiv 0$, $w_x \equiv 0$, $w_{xx} \equiv 0$, $w_{xt} \equiv 0$, и $w \equiv 0$ (так как $w(x, 0) = 0$ и $w_t \equiv 0$). Таким образом, $u^1 \equiv u^2$, что доказывает единственность.

Заключение

В работе проведено полное исследование начально-краевой задачи для линеаризованного уравнения Бенни–Люка с коэффициентом $a(t)$, зависящим

только от времени, и граничными условиями типа шарнирного опирания. Основные результаты:

1. Методом Фурье построено явное решение в виде ряда по собственным функциям $\sin(n\pi x/l)$.
2. Доказано, что при достаточной гладкости входных данных ($\varphi \in C^6$, $\psi \in C^4$, $f \in C^2$) ряды для решения и всех его производных до четвёртого порядка по x и второго порядка по t сходятся равномерно, что гарантирует существование классического решения.
3. Энергетическим методом доказана единственность решения.
4. Установлены условия согласования на углах области, необходимые для регулярности решения.

Полученные результаты могут быть распространены на случай нелинейного уравнения Бенни–Люка, а также использованы при построении численных методов. В дальнейшем планируется исследовать задачу с коэффициентом $a(x)$, зависящим от пространственной переменной, где моды оказываются связанными, что требует применения более сложных методов, таких как метод Галёркина или теория возмущений.

Литература

1. Benney D.J., Luke J.C. Interactions of permanent waves of finite amplitude // Journal of Mathematics and Physics. 1964. Vol. 43. P. 309–313.
2. Quintero J.R., Grajales J.C.M. Instability of solitary waves for a generalized Benney-Luke equation // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2008. Vol. 68. No. 8. P. 2341–2360.

3. Grajales J.C.M. Analysis of a Fourier-Galerkin numerical scheme for a 1D Benney-Luke-Paumond equation // Communications on Pure and Applied Analysis. 2017. Vol. 16. No. 5. P. 1789–1818.
4. Whitham G.B. Linear and Nonlinear Waves. New York: Wiley, 1974.
5. Yuldashev T.K. Determining of coefficients and the classical solvability of a nonlocal boundary-value problem for the Benney-Luke integro-differential equation // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. No. 5. P. 1103–1114.
6. Yuldashev T.K., Rakhmonov F.D. On a Benney-Luke type differential equation with nonlinear boundary value conditions // Differential Equations. 2021. Vol. 57. No. 3. P. 375–384.
7. Durdiev U.D. Inverse Problem of Determining an Unknown Coefficient in the Beam Vibration Equation // Differential Equations, 2022, Vol. 58, No. 1, pp. 36–43.
8. Durdiev U.D. Inverse Problem of Determining the Unknown Coefficient in the Beam Vibration Equation in an Infinite Domain // Differential Equations, 2023, Vol. 59, No. 4, pp. 462–472.
9. Evans L.C. *Partial Differential Equations*. 2nd ed. Providence: AMS, 2010.