NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI, [2026-8]
ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427

01.00.00-FIZIKA-MATEMATIKA
journal.namdu.uz
PHYSICS AND MATHEMATICS

IKKINCHI TUR MATRITSAVIY SOHADA INTERPOLYATSION KETMA-KETLIKLAR UCHUN KARLESON TIPIDAGI YETARLI SHART

Akbaraliyeva Mehrinisso Shavkat qizi
Toshkent shahar Olmazor tumanida joylashgan
28-sonli umumiy o‘ rta ta’lim maktabi Matematika fani o‘ qituvchisi
Korporativ e-mail: akbaraliyevamehrinisso@gmail.com

Annotatsiya. *Maqolada ikkinchi tur matritsaviy sohada chegaralangan golomorf funksiyalar sinfi uchun interpolyatsion ketma-ketliklar masalasi tadqiq etiladi. Tadqiqotning maqsadi klassik Karleson ajralish g‘ oyasini matritsaviy sohaning avtomorfik geometriyasiga moslashtirish va H∞(D) fazoda interpolyatsiya mavjudligini ta’minlaydigan konstruktiv yetarli shartni asoslashdan iborat. Metodologik jihatdan matritsaviy soha avtomorfizmlari, unitar invariantlik, psevdogiperbolik tipdagi invariant miqdorlar, yordamchi metrik baholar va fundamental golomorf funksiyalar tizimini qurish usullaridan foydalaniladi. Asosiy natija sifatida har bir tugun uchun avtomorfik ajralish ko‘ paytmasi yagona musbat δ son bilan pastdan chegaralansa, berilgan nuqtalar ketma-ketligi H∞(D) uchun interpolyatsion bo‘ lishi ko‘ rsatiladi. Isbot faqat mavjudlikni emas, balki chegaralangan ma’lumotlardan chegaralangan golomorf interpolantni qator ko‘ rinishida qurish mexanizmini ham beradi. Natija klassik birlik doiradagi Karleson nazariyasini ikkinchi tur matritsaviy sohaga tatbiq etiladigan yetarli shart shaklida rivojlantiradi va keyingi umumlashtirishlar uchun nazariy asos yaratadi.*

Kalit so‘ zlar: *matritsaviy soha, interpolyatsion ketma-ketlik, Karleson teoremasi, H∞ fazo, golomorf funksiya, avtomorfizm, psevdogiperbolik masofa, unitar invariantlik.*

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ТИПА КАРЛЕСОНА ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В МАТРИЧНОЙ ОБЛАСТИ ВТОРОГО ТИПА

Аннотация. *В статье исследуется задача интерполяционных последовательностей для класса ограниченных голоморфных функций в матричной области второго типа. Цель исследования состоит в адаптации классической идеи разделения Карлесона к автоморфной геометрии матричной области и в обосновании конструктивного достаточного условия существования интерполяции в H∞(D). Методологическую основу составляют автоморфизмы матричной области, унитарная инвариантность, инвариантные величины псевдогиперболического типа, вспомогательные метрические оценки и построение системы фундаментальных голоморфных функций. Основной результат утверждает, что если для каждого узла произведение автоморфных величин разделения равномерно отделено от нуля положительной постоянной δ, то данная последовательность является интерполяционной для H∞(D). Конструктивная схема доказательства не только устанавливает существование, но и задаёт механизм построения ограниченного голоморфного интерполянта в виде ряда. Полученный результат развивает классическую теорию Карлесона для единичного круга в форме достаточного условия, применимого к матричной области второго типа.*

Ключевые слова: *матричная область, интерполяционная последовательность, теорема Карлесона, пространство H∞, голоморфная функция, автоморфизм, псевдогиперболическая метрика, унитарная инвариантность.*

A SUFFICIENT CONDITION OF CARLESON TYPE FOR INTERPOLATING SEQUENCES IN A SECOND-TYPE MATRIX DOMAIN

Abstract. *The paper investigates interpolating sequences for bounded holomorphic functions in a matrix domain of the second type. The aim is to adapt the classical Carleson separation idea to the automorphic geometry of the matrix domain and to justify a constructive sufficient condition for interpolation in H∞(D). The methodology combines automorphisms of the domain, unitary invariance, pseudohyperbolic-type invariant quantities, auxiliary metric estimates, and the construction of a family of fundamental bounded holomorphic functions. The main result states that if, for every interpolation node, the product of automorphic separation quantities is uniformly bounded below by a positive constant δ, then the sequence is interpolating for H∞(D). The proof is constructive: it establishes not only existence but also a mechanism for representing the bounded holomorphic interpolant as a normally convergent*

series. The result extends the classical Carleson philosophy from the unit disk to a matrix domain of the second type in the form of a practically verifiable sufficient condition and provides a basis for further generalizations.

Keywords: *matrix domain, interpolating sequence, Carleson theorem, H∞ space, holomorphic function, automorphism, pseudohyperbolic metric, unitary invariance.*

KIRISH

Kompleks analizda interpolyatsiya masalasi berilgan nuqtalar to‘ plamida oldindan tayinlangan qiymatlarni qabul qiluvchi analitik yoki golomorf funksiyani qurish bilan bog‘ liq fundamental masalalardan biridir. Bunday masalalarda faqat alohida nuqtalarda qiymatlarni moslashtirishning o‘ zi yetarli emas: qurilayotgan funksiyaning butun sohada qaysi sinfga tegishli bo‘ lishi, uning normasi qanday nazorat qilinishi va tugunlarning geometrik joylashuvi bilan funksional xossalar o‘ rtasidagi bog‘ lanish ham muhim ahamiyat kasb etadi. Ayniqsa, chegaralangan golomorf funksiyalar fazosi H∞ uchun interpolyatsiya tugunlarining geometrik tavsifi klassik kompleks analizning markaziy yo‘ nalishlaridan biri bo‘ lib, bu boradagi usullar keyinchalik ko‘ p o‘ lchamli kompleks analiz, operatorlar nazariyasi va matritsaviy sohalar geometriyasiga keng tatbiq etilgan [1].

Birlik doira holatida interpolyatsion ketma-ketliklarning tabiati nuqtalar orasidagi psevdogiperbolik ajralish bilan chambarchas bog‘ liq. Mazkur yondashuvning mohiyati shundaki, oddiy Evklid masofasi sohaning konformal yoki avtomorfik geometriyasini to‘ liq aks ettirmaydi; shuning uchun masalani aynan soha avtomorfizmlari bilan invariant bo‘ lgan miqdorlar orqali ifodalash zarur bo‘ ladi. Interpolyatsiya nazariyasidagi klassik ishlarda chegaralangan ma’lumotlarni chegaralangan analitik funksiya orqali tiklash, interpolant normasini baholash va ajralish shartidan foydalanishning turli konstruktiv usullari ishlab chiqilgan [2, 3].

Ko‘ p o‘ lchamli sohalarga o‘ tilganda geometriya keskin murakkablashadi. Shar yoki polidiskda har bir koordinata va ichki metrika o‘ zaro bog‘ langan holda qatnashadi; matritsaviy sohalarda esa nuqtaning o‘ zi kompleks matritsa bo‘ lib, uning spektral xossalari, simmetriya shartlari, operator normasi va unitar almashtirishlarga nisbatan invariantligi hisobga olinadi. Shu sababli bir o‘ lchamli natijani faqat belgilarni almashtirish orqali ko‘ chirish mumkin emas. Shar va polidisk uchun olingan H∞ interpolyatsiya natijalari ko‘ p o‘ lchamli yondashuvning asosiy yo‘ nalishlarini ko‘ rsatadi [4, 5], matritsaviy sohalarga oid kompleks analiz esa invariant geometriya uchun zarur apparatni beradi [6].

Mazkur tadqiqotning dolzarbligi ikkinchi tur matritsaviy sohada interpolyatsion ketma-ketliklarni tekshirish uchun aniq, invariant va konstruktiv mezonga ehtiyoj mavjudligi bilan belgilanadi. Amaliy tekshiriladigan yetarli shart, bir tomondan, ketma-ketlik tugunlarining soha ichki geometriyasida qanday joylashishi kerakligini ko‘ rsatadi; ikkinchi tomondan esa shu shart bajarilganda interpolantni qanday qurish mumkinligini tushuntiradi. Bu ikki jihatning birlashishi sof mavjudlik teoremasidan ko‘ ra kuchliroq metodik qiymatga ega, chunki u keyingi baholashlar, normani nazorat qilish va boshqa klassik sohalarga umumlashtirish uchun tayanch mexanizmni beradi.

Maqolaning maqsadi magistrlik dissertatsiyasida shakllantirilgan ilmiy natijani tizimli ravishda bayon qilish, ikkinchi tur matritsaviy soha avtomorfizmlaridan kelib chiqadigan Karleson tipidagi ajralish shartining mazmunini ochish, konstruktiv isbot bosqichlarini izchil asoslash hamda natijaning klassik interpolyatsiya nazariyasidagi o‘ rnini ko‘ rsatishdan iborat. Tadqiqot vazifalari sifatida: H∞(D) fazoning ishlatiladigan xossalarini belgilash; avtomorfik invariant ajralish miqdorini tavsiflash; yetarli shartni teorema shaklida ifodalash; fundamental funksiyalar tizimining qurilishini tushuntirish; interpolant qatorning normal yaqinlashuvi va chegaralanganligini asoslash; olingan natijani klassik birlik doira holati bilan qiyosiy tahlil qilish belgilandi.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA NAZARIY ASOS

Chegaralangan analitik funksiyalar nazariyasi H∞ va H^p fazolar, Blyashke ko‘ paytmalari, chegaraviy qiymatlar, ichki va tashqi funksiyalar hamda faktorizatsiya masalalari bilan uzviy bog‘ liq. Garnettning monografiyasida chegaralangan analitik funksiyalar apparati, funksional baholar va interpolyatsiya nazariyasining ko‘ plab klassik vositalari tizimlashtirilgan [1]. H^p fazolariga oid umumiy nazariya esa funksiyalarning chegaradagi xulqi hamda normaviy xossalarni tushunishda muhim asos bo‘ lib xizmat qiladi [7].

Interpolyatsion ketma-ketliklar nuqtai nazaridan Earl chegaralangan sonli ketma-ketliklarni chegaralangan funksiyalar yordamida interpolyatsiya qilish masalasini o‘ rgangan va interpolant normasi bilan geometrik ajralish o‘ rtasidagi bog‘ lanishga e’tibor qaratgan [2]. Jonesning δ-masalaga bag‘ ishlangan yondashuvi esa L∞ baholarni olishda konstruktiv usullarning kuchini ko‘ rsatadi [3]. Ushbu ishlardan kelib chiqadigan metodik xulosa shuki, interpolyatsiya masalasida geometrik ajralish shartini faqat zarur formal cheklov sifatida emas, balki yordamchi funksiyalarni qurishga imkon beradigan miqdoriy resurs sifatida ko‘ rish lozim.

Ko‘ p o‘ lchamli kompleks analizda Berndtsson shar uchun H∞ interpolyatsiyasini tadqiq etgan [4]. Berndtsson, Chang va Linning polidiskdagi interpolyatsion ketma-ketliklarga oid natijalari esa bir nechta kompleks o‘ zgaruvchili sohalarda koordinataviy va invariant shartlar o‘ rtasidagi munosabatni yoritadi [5]. Mazkur ishlar bir o‘ lchamli

psevdogiperbolik geometriya g‘ oyasi yuqori o‘ lchamda saqlanib qolishini, biroq u sohaning o‘ ziga xos avtomorfizmlari va invariant metrikasi bilan qayta ifodalanishi kerakligini ko‘ rsatadi.

Matritsaviy sohalarda kompleks analizning asosiy xususiyati shundaki, nuqtalar skalyar sonlar yoki oddiy vektorlar emas, balki ma’lum algebraik va normaviy cheklovlarni qanoatlantiruvchi matritsalardan iborat bo‘ ladi. Xudayberganov, Kytmanov va Shaimqulovning matritsaviy sohalar bo‘ yicha ishlari bunday sohalarning avtomorfizmlari, invariant miqdorlari va golomorf akslantirishlariga oid nazariy apparatni rivojlantiradi [6]. Aynan shu apparat Karleson tipidagi mezonni ikkinchi tur matritsaviy sohada ifodalashga imkon beradi. Mahalliy ilmiy adabiyotlarda polikrug va ko‘ p o‘ lchamli sohalardagi interpolyatsiya masalalariga qiziqish mavjudligi ham qayd etiladi [8].

Adabiyotlar tahlilidan ko‘ rinadiki, klassik interpolyatsiya nazariyasida uchta asosiy element takroran uchraydi: tugunlarning invariant geometriyada ajralishi, tugunlarga mos fundamental funksiyalarni qurish va bu funksiyalar yig‘ indisini global nazorat qilish. Mazkur maqolada aynan shu uchlik ikkinchi tur matritsaviy soha uchun moslashtiriladi. Yondashuvning farqli jihati shundaki, skalyar Möbius almashtirishlari o‘ rniga matritsaviy sohaning φ_P avtomorfizmlari ishlatiladi va ajralish miqdori ular orqali belgilanadi.

TADQIQOT OBYEKTI, PREDMETI VA METODOLOGIYASI

Tadqiqot obyekti — ikkinchi tur matritsaviy sohada joylashgan $\{P_k\}$ nuqtalar ketma-ketligi va ushbu sohada aniqlangan chegaralangan golomorf funksiyalar fazosi $H^\infty(D)$. Tadqiqot predmeti esa ketma-ketlikning $H^\infty(D)$ uchun interpolyatsion bo‘ lishini ta’minlaydigan avtomorfik ajralish sharti hamda shu shart asosida interpolant qurish mexanizmidir. D bilan ikkinchi tur matritsaviy soha belgilanadi; uning nuqtalari tegishli simmetriya va normaviy shartlarni qanoatlantiruvchi kompleks matritsalardan iborat deb olinadi. Har bir $P \in D$ uchun φ_P sohaning avtomorfizmi bo‘ lib, $\varphi_P(P)=0$ shartini qanoatlantiradi [6].

Metodologiya nazariy-deduktiv xarakterga ega. Birinchi bosqichda klassik H^∞ interpolyatsiyasidagi ajralish tamoyili va uning ko‘ p o‘ lchamli analoglari tahlil qilinadi [1–5]. Ikkinchi bosqichda ikkinchi tur matritsaviy sohaning avtomorfik geometriyasidan foydalanib, nuqtalar orasidagi psevdogiperbolik tipdagi invariant miqdor aniqlanadi. Uchinchi bosqichda Karleson tipidagi ko‘ paytma sharti qabul qilinib, undan juft ajralish va maxrajlarning noldan uzoqligi kabi yordamchi baholar chiqariladi. To‘ rtinchi bosqichda har bir tugun uchun fundamental gk funksiyalar quriladi. Yakuniy bosqichda ularning modullari yig‘ indisi yagona o‘ zgarmas bilan chegaralanishi asosida interpolant qatorning normal yaqinlashuvi va $H^\infty(D)$ ga tegishliligi ko‘ rsatiladi.

Sof matematik tadqiqot xususiyatidan kelib chiqib, maqolada empirik tajriba yoki kuzatuv ma’lumotlari sun’iy ravishda kiritilmaydi. Natijani tekshirishning asosiy shakli mantiqiy-isbotiy verifikatsiya bo‘ lib, har bir xulosa oldingi baholar, invariantlik xossalari va qatorlarning normal yaqinlashuv mezonlari bilan asoslanadi. Shu bilan birga, natijalar taqqoslovchi jadval va konstruktiv sxema yordamida vizuallashtiriladi; bu vositalar teoremaning mazmunini va klassik holatdan matritsaviy holatga o‘ tish mantiqini aniqroq ko‘ rsatishga xizmat qiladi.

ASOSIY TUSHUNCHALAR VA INVARIANT GEOMETRIYA

$H^\infty(D)$ bilan D sohada aniqlangan barcha chegaralangan golomorf funksiyalar fazosi belgilanadi. Ushbu fazoda norma odatdagidek $\|F\|_\infty=\sup_{Z\in D}|F(Z)|$ ko‘ rinishida olinadi. $\{P_k\}\subset D$ ketma-ketlik $H^\infty(D)$ uchun interpolyatsion deyiladi, agar har qanday chegaralangan $\{b_k\}\subset\mathbb{C}$ ketma-ketlik uchun $F(P_k)=b_k$ tengliklarni barcha k lar uchun qanoatlantiruvchi $F\in H^\infty(D)$ funksiya mavjud bo‘ lsa. Bu ta’rifda ikki talab bir vaqtda ishtirok etadi: tayinlangan qiymatlarni aniq tiklash va qurilgan funksiyaning butun D sohada chegaralangan bo‘ lishi.

Matritsaviy sohada ajralish Evklid normasi bilan emas, avtomorfizmlar yordamida ifodalangan invariant miqdor bilan o‘ lchanadi. $\varphi_P(P)=0$ bo‘ lgani uchun $|\varphi_P(Q)|$ ifoda P va Q nuqtalar o‘ rtasidagi psevdogiperbolik tipdagi ajralishni tavsiflaydi. Bu miqdorning muhim jihati shundaki, u sohaning tabiiy simmetriyalari bilan moslashadi va koordinatalarni tasodifiy tanlashga bog‘ lanib qolmaydi. Unitar almashtirishlarga nisbatan invariantlik matritsani qulayroq diagonal yoki kanonik ko‘ rinishga keltirishda geometrik ma’noni saqlab qolish imkonini beradi.

Interpolyatsion ketma-ketlik uchun faqat har bir juft nuqtaning bir-biridan uzoq bo‘ lishi yetarli bo‘ lmasligi mumkin. Karleson tipidagi yondashuvda bir tugunning barcha boshqa tugunlarga nisbatan umumiy ajralishi ko‘ paytma orqali nazorat qilinadi. Bu ko‘ paytma alohida masofalarning lokal xossalarini yagona global shartga birlashtiradi. Aynan shuning uchun u keyingi konstruksiyada fundamental funksiyaning maxrajlarini nazorat qilish, logarifmik baholarni qo‘ llash va barcha gk lar yig‘ indisini bir xil o‘ zgarmas bilan chegaralash uchun qulay hisoblanadi.

ASOSIY NATIJA VA TEOREMA

D ikkinchi tur matritsaviy soha, $\{P_k\}\subset D$ esa undagi nuqtalar ketma-ketligi bo‘ lsin. Har bir $P\in D$ uchun φ_P soha avtomorfizmi bo‘ lib, $\varphi_P(P)=0$ shartni qanoatlantirsin. Dissertatsiyada olingan asosiy ilmiy natija quyidagi Karleson tipidagi yetarli shart ko‘ rinishida ifodalanadi.

Teorema. Agar shunday $\delta>0$ mavjud bo‘ lib, har bir k uchun

$$\prod_{j\neq k} |\varphi_{P_j}(P_k)| \geq \delta. \qquad (1)$$

shart bajarilsa, u holda {Pk} ketma-ketlik H∞(D) fazo uchun interpolyatsion ketma-ketlik bo‘ ladi. Ya’ni har qanday chegaralangan {bk}⊂ℂ ketma-ketlik uchun shunday F∈H∞(D) funksiya mavjudki, F(Pk)=bk, k=1,2,… tengliklar bajariladi.

Teoremaning geometrik mazmuni quyidagicha. (1) shart har bir Pk tugunining qolgan barcha tugunlarga nisbatan avtomorfik geometriyada yetarli darajada ajralganligini bir vaqtning o‘ zida nazorat qiladi. Ko‘ paytmadagi har bir ko‘ paytuvchi 0 va 1 oralig‘ idagi invariant ajralish miqdorini ifodalaganligi sababli, butun ko‘ paytmaning yagona δ>0 son bilan pastdan chegaralanishi biror omilning haddan tashqari kichrayib ketishiga yo‘ l qo‘ ymaydi. Natijada tugunlar orasida kolliziya yoki haddan tashqari zich to‘ planishning interpolatsiya konstruksiyasini buzuvchi shakli cheklanadi.

Isbotning birinchi bosqichida (1) shartdan juft nuqtalar uchun bir jinsli ajralish baholari olinadi. Agar ko‘ paytma δ dan kichik bo‘ lmasa, har bir alohida omil ham nazorat ostida bo‘ ladi. Bu holat fundamental funksiyalarni qurishda paydo bo‘ ladigan normalizatsiya koeffitsientlarining noldan uzoqligini kafolatlaydi. Mazkur bosqichning vazifasi keyingi formulalarda maxrajning kichrayib ketishi sababli normaning nazoratsiz o‘ sib ketishini oldini olishdir.

Ikkinchi bosqichda invariant miqdorning unitar almashtirishlarga nisbatan o‘ zgarmasligi va unga mos uchburchak tipidagi baholar ishlatiladi. Simmetrik kompleks matritsani qulay unitar-diagonal ko‘ rinishga keltirish ko‘ p o‘ lchamli vaziyatdagi ayrim baholarni skalyar parametrlar bo‘ yicha tahlil qilishga imkon beradi. Bunda diagonalizatsiya masalaning mohiyatini o‘ zgartirmaydi, chunki ishlatilayotgan miqdorlar unitar invariantdir. Shu tariqa klassik psevdogiperbolik geometriyaga xos baholarning matritsaviy analoglari olinadi.

Uchinchi bosqichda har bir k uchun gk∈H∞(D) fundamental funksiyalar quriladi. Ular tugunlarda Kroneker delta xossasini qanoatlantiradi:

$$g_k(P_j)=0 \ (j\neq k), \qquad g_k(P_k)=1. \tag{2}$$

(2) xossa interpolyatsiyaning algebraik qismini ta’minlaydi: har bir gk funksiya aynan o‘ z tugunida birlikka teng bo‘ lib, qolgan tugunlarda yo‘ qoladi. Biroq faqat shu xossa yetarli emas. Cheksiz ko‘ p tugunlar uchun interpolantni qator sifatida qurish rejalashtirilgani sababli, gk funksiyalarning umumiy o‘ sishini ham nazorat qilish talab etiladi. (1) shart va yordamchi logarifmik baholar asosida quyidagi global baho olinadi:

$$\sup_{Z\in D} \Sigma_{k=1}^{\infty} |g_k(Z)| \le C(\delta) < \infty. \tag{3}$$

Bu yerda C(δ) faqat ajralish parametriga bog‘ liq o‘ zgarmasdir. (3) baho konstruktiv isbotning markaziy nuqtasi hisoblanadi. U bir tomondan qatorni kompakt to‘ plamlarda normal yaqinlashtiradi, ikkinchi tomondan esa interpolantning H∞ normasini berilgan ma’lumotlarning supremum normasi orqali baholash imkonini beradi. Demak, ajralish sharti faqat tugunlarning geometrik xossasini emas, balki interpolatsiya operatorining miqdoriy barqarorligini ham ifodalaydi.

Endi {bk} chegaralangan kompleks sonlar ketma-ketligi bo‘ lsin va M=supk|bk|<∞ deb olaylik. Interpolant quyidagicha aniqlanadi:

$$F(Z)=\Sigma_{k=1}^{\infty} b_k\, g_k(Z). \tag{4}$$

(3) bahodan |bk gk(Z)|≤M|gk(Z)| kelib chiqadi va Σ|gk(Z)| butun D da yagona o‘ zgarmas bilan nazorat qilinadi. Shuning uchun (4) qator D ning kompakt qism to‘ plamlarida normal yaqinlashadi; normal yaqinlashuvchi golomorf funksiyalar qatorining yig‘ indisi golomorf bo‘ ladi. Bundan tashqari,

$$|F(Z)| \le M\, \Sigma_{k=1}^{\infty}|g_k(Z)| \le M\cdot C(\delta),$$

ya’ni ‖F‖∞≤M·C(δ) va F∈H∞(D). Nihoyat, (2) dan foydalanib, har bir j uchun F(Pj)=Σkbkgk(Pj)=bj olinadi. Demak, {Pk} ketma-ketlik interpolyatsiondir. Bu bilan teoremaning konstruktiv isbot sxemasi yakunlanadi.

NATIJALARNING TAHLILI VA TAQQOSLASH

Olingan natijani klassik birlik doira holati bilan qiyoslash uning mazmunini aniqroq ko‘ rsatadi. Har ikki vaziyatda asosiy g‘ oya tugunlarning invariant geometriyada ajralishini nazorat qilishdan iborat. Farq shundaki, birlik doirada geometriya Möbius almashtirishlari va skalyar psevdogiperbolik masofa orqali ifodalansa, ikkinchi tur matritsaviy sohada nuqtalar matritsa bo‘ lgani uchun φP avtomorfizmlari va unitar invariant matritsaviy miqdorlar ishlatiladi. Shunga qaramay, ajralish → fundamental funksiyalar → yig‘ indi bahosi → interpolant zanjiri saqlanib qoladi.

1-jadvalda klassik va matritsaviy holatlarning metodik mosligi ko‘ rsatilgan. Jadvaldan ko‘ rinadiki, umumlashtirish oddiy terminologik almashtirish emas; har bir klassik element matritsaviy sohaning ichki geometriyasiga mos keladigan yangi obyekt bilan almashtiriladi. Shu jihatdan (1) shartning ilmiy ahamiyati uning Karleson g‘ oyasini soha simmetriyalari bilan uyg‘ unlashtirishidadir.

1-jadval

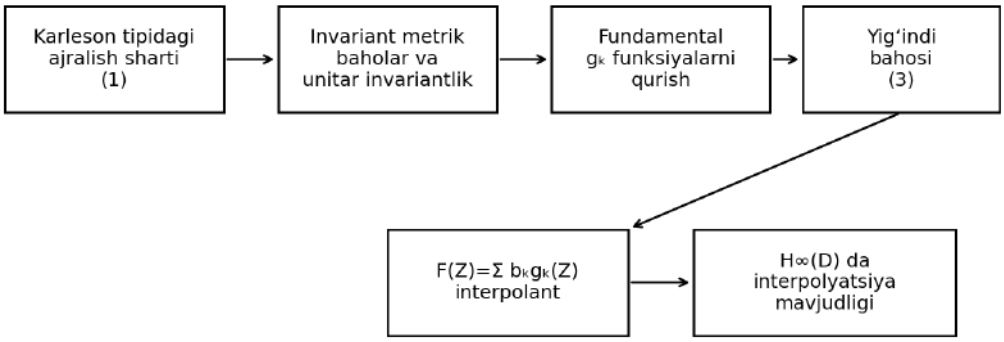
Klassik birlik doira va ikkinchi tur matritsaviy sohadagi interpolyatsiya elementlarining qiyosiy tavsifi

Tahlil elementi	Birlik doira holati	Ikkinchi tur matritsaviy soha
Tugun	Kompleks son z_k	Kompleks matritsa P_k
Invariant almashtirish	Möbius almashtirishi	φ_P matritsaviy avtomorfizmi
Ajralish mezoni	Psevdogiperbolik ko‘ paytma	Avtomorfik ko‘ paytma (1)

Fundamental obyekt	Chegaralangan analitik funksiyalar	g_k∈H∞(D) fundamental funksiyalar
Global nazorat	Norma/yig‘ indi bahosi	$\Sigma\|g_k(Z)\|\le C(\delta)$
Natija	H∞ interpolant	H∞(D) interpolant

Jadvaldagi moslik natijaning umumlashtiruvchi xarakterini ko‘ rsatadi. Klassik holatdagi barcha muhim funksional bosqichlar saqlangan, biroq ular matritsaviy sohaning avtomorfik tuzilishi bilan qayta ifodalangan. Bu yondashuvning afzalligi shundaki, interpolyatsiya mezoni tashqi koordinata tanloviga emas, sohaning ichki geometriyasiga bog‘ langan bo‘ ladi. Natijada mezon unitar almashtirishlar ostida o‘ z ma’nosini saqlaydi va turli kanonik ko‘ rinishlarda bir xil geometrik mazmunni beradi.

Konstruktiv isbotning ichki mantiqi 1-rasmda aks ettirilgan. Dastlab Karleson tipidagi ajralish sharti qabul qilinadi; undan invariant metrik baholar olinadi; bu baholar fundamental funksiyalarni qurishga xizmat qiladi; keyin ularning umumiy yig‘ indisi nazorat qilinadi; oxirida chegaralangan ma’lumotlar bilan og‘ irlashtirilgan qator H∞(D) interpolantini beradi.



1-rasm. Karleson tipidagi shartdan H∞(D) interpolantigacha bo‘ lgan konstruktiv sxema

Sxemadan ko‘ rinadiki, (3) baho butun konstruksiyaning barqarorlik markazi hisoblanadi. Agar fundamental funksiyalar faqat tugunlarda (2) shartni qanoatlantirib, ularning umumiy moduli nazorat qilinmaganida, (4) qatorning yaqinlashuvi va chegaralanganligi kafolatlanmagan bo‘ lar edi. Demak, ilmiy natijadagi muhim yangiliklardan biri ajralish shartini aynan global yig‘ indi bahosiga olib boradigan darajada kuchli shaklda qo‘ llashdir.

Natijaning yana bir muhim tomoni normaviy bahodir. $\|F\|_\infty \le C(\delta)\|b\|_\infty$ tengsizlik interpolyatsiya operatorining chegaralanganligini ko‘ rsatadi. Bu yerda C(δ) ning aniq ko‘ rinishini aniqlash keyingi tadqiqot vazifasi bo‘ lishi mumkin, biroq uning faqat δ ga bog‘ liq bo‘ lishining o‘ zi ketma-ketlik geometriyasi bilan interpolant barqarorligi o‘ rtasidagi bevosita aloqani ko‘ rsatadi. Ajralish kuchliroq bo‘ lsa, ya’ni δ noldan yaxshiroq uzoqlashsa, konstruksiyada paydo bo‘ ladigan denominators va yordamchi koeffitsientlarni nazorat qilish qulaylashadi.

2-jadvalda isbot bosqichlarining vazifasi va yakuniy natijaga qo‘ shadigan hissasi jamlangan. Bunday tuzilma teoremani faqat yakuniy formula sifatida emas, balki ketma-ket mantiqiy operatsiyalar tizimi sifatida ko‘ rish imkonini beradi.

2-jadval

Konstruktiv isbot bosqichlari va ularning funksional vazifasi

Bosqich	Asosiy amal	Natijadagi vazifa
1	(1) ajralish shartidan juft baholar olish	Tugunlar kolliziyasini cheklash
2	Unitar invariantlik va metrik baholar	Matritsaviy geometriyani nazorat qilish
3	g_k fundamental funksiyalarni qurish	Tugun qiymatlarini ajratish
4	$\Sigma\|g_k\|\le C(\delta)$ global bahosini olish	Qator yaqinlashuvi va norma nazorati
5	$F=\Sigma b_k g_k$ qatorini qurish	Berilgan ma’lumotlarni interpolatsiya qilish

ILMIY YANGILIK VA MUHOKAMA

Maqolada yoritilgan ilmiy yangilikning asosiy mazmuni klassik interpolyatsiya nazariyasidagi ajralish tamoyilini ikkinchi tur matritsaviy sohaning avtomorfik geometriyasiga mos shaklda ifodalash va undan H∞(D) da interpolyatsiya mavjudligi uchun konstruktiv yetarli shart olishdan iborat. Ilmiy yangilik ikki darajada namoyon bo‘ ladi. Birinchidan,

ajralish sharti matritsaviy nuqtalarning tabiiy avtomorfizmlari orqali ifodalanadi. Ikkinchidan, ushbu shart fundamental funksiyalar sistemasini qurish va umumiy yig‘ indi bahosini olish bilan bevosita bog‘ lanadi.

Klassik Karleson g‘ oyasi bilan o‘ xshashlik (1) ko‘ paytma shartida yaqqol ko‘ rinadi. Biroq birlik doiradagi Möbius almashtirishlari o‘ rnini φP matritsaviy avtomorfizmlari egallashi natijaning mazmunini sifat jihatidan o‘ zgartiradi. Matritsaviy nuqtaning koordinatalari o‘ zaro algebraik bog‘ langan bo‘ lishi mumkin; shu sabab invariantlik oddiy texnik qulaylik emas, balki mezonning geometrik to‘ g‘ riligini ta’minlaydigan asosiy talabdir. Bu holat natijani tasodifiy bazis yoki koordinata sistemasiga bog‘ lanib qolishdan saqlaydi.

Konstruktiv isbot nazariy jihatdan ham muhim. Fundamental gk funksiyalarni qurish interpolyatsiya operatorining mavjudligini ko‘ rsatadi, (3) esa ushbu operatorning chegaralanganligini nazorat qiladi. Shunday qilib, teorema “interpolant mavjud” degan sifat xulosasi bilan cheklanmay, “interpolantni qanday yig‘ ish va uning normasini qanday baholash mumkin” degan savollarga ham javob beradi. Bu jihat keyingi tadqiqotlarda interpolyatsiya konstantalarini aniqroq hisoblash, tugun zichligi bilan norma o‘ rtasidagi bog‘ lanishni o‘ rganish va operator qiymatli ma’lumotlarga o‘ tishda muhim bo‘ lishi mumkin.

Natija ayni paytda yetarli shart sifatida talqin qilinishi lozim. Ya’ni (1) bajarilganda interpolyatsiya kafolatlanadi, biroq interpolyatsion bo‘ lgan har qanday ketma-ketlik albatta aynan shu ko‘ paytma shartini qanoatlantirishi ushbu maqolada da’vo qilinmaydi. Ikkinchi tur matritsaviy soha uchun zarur va yetarli mezonlarning to‘ liq tavsifi, shuningdek C(δ) o‘ zgarmasining optimal bahosi alohida tadqiqot yo‘ nalishidir. Ilmiy xulosalarni aynan shu chegaralarda talqin qilish natijaning ishonchliligini saqlaydi.

Maqolaning nazariy ahamiyati shundaki, u skalyar interpolyatsiya nazariyasidagi umumiy metodologiyani matritsaviy kompleks analizga moslashtirish yo‘ lini ko‘ rsatadi. Amaliy-metodik ahamiyati esa tekshiriladigan shart va konstruktiv algoritmning mavjudligidadir: berilgan ketma-ketlik uchun ajralish parametri nazorat qilinadi, so‘ ng fundamental funksiyalar tizimi quriladi va berilgan chegaralangan ma’lumotlar asosida interpolant hosil qilinadi. Bu sxema kompyuter algebra tizimlarida chekli tugunlar uchun modellashtirish yoki sonli tajribalar tashkil etish uchun ham konseptual asos bo‘ la oladi, biroq bunday sonli tajribalar ushbu maqolaning manba materialida keltirilmaganligi sababli alohida natija sifatida taqdim etilmaydi.

TADQIQOTNING CHEGARALARI VA ISTIQBOLLI YO‘ NALISHLAR

Tadqiqotning birinchi chegarasi shundaki, asosiy natija yetarli shart ko‘ rinishida berilgan. Zaruriy shartning aniq shakli va ikki yo‘ nalishning ekvivalentligini o‘ rnatish uchun qo‘ shimcha geometrik hamda funksional-analitik vositalar talab qilinadi. Ikkinchi chegara C(δ) o‘ zgarmasining optimal yoki aniq bahosi berilmaganidadir. Bu o‘ zgarmasning δ ga bog‘ liqligini aniqlashtirish interpolatsiya operatorining normasi bo‘ yicha yanada kuchli xulosalar olish imkonini beradi.

Kelgusida usulni boshqa klassik matritsaviy sohalarga ko‘ chirish, operator qiymatli interpolyatsiya masalalariga tatbiq etish, chekli ketma-ketliklar uchun hisoblash algoritmlarini ishlab chiqish va invariant ajralish mezonining zaruriylik darajasini o‘ rganish maqsadga muvofiq. Shuningdek, matritsaviy sohalarda interpolatsiya tugunlarining zichlik xossalari bilan H∞ normasi o‘ rtasidagi bog‘ lanish alohida ilmiy qiziqish uyg‘ otadi.

XULOSA

Ikkinchi tur matritsaviy sohada H∞(D) uchun interpolyatsion ketma-ketliklarni o‘ rganishda Karleson tipidagi avtomorfik ajralish sharti samarali yetarli mezon ekanligi asoslandi. Agar har bir tugun uchun boshqa tugunlarga nisbatan avtomorfik ajralishni ifodalovchi $\prod_{j\neq k}|\varphi_{P_j}(P_k)|$ ko‘ paytma yagona $\delta>0$ son bilan pastdan chegaralansa, berilgan ketma-ketlik H∞(D) uchun interpolyatsion bo‘ ladi. Mazkur xulosa tugunlar geometriyasini funksional interpolyatsiya imkoniyati bilan bog‘ laydi.

Isbotning konstruktiv mohiyati uch asosiy qadamda namoyon bo‘ ladi: invariant metrik baholarni olish, Kroneker delta xossasiga ega fundamental gk funksiyalarni qurish va ularning modullari yig‘ indisini C(δ) bilan global chegaralash. Shu bahodan foydalanib $F(Z)=\Sigma b_k g_k(Z)$ qatorining normal yaqinlashuvi, golomorfligi va $\|F\|_\infty \le C(\delta)\|b\|_\infty$ normaviy nazorati kelib chiqadi. Demak, natija faqat mavjudlikni emas, balki interpolantni qurish mexanizmini ham beradi.

Tadqiqot klassik birlik doiradagi Karleson g‘ oyasining ikkinchi tur matritsaviy soha sharoitidagi tabiiy davomi sifatida qaralishi mumkin. Bunda skalyar Möbius geometriyasi matritsaviy avtomorfizmlar geometriyasi bilan almashtiriladi, ammo ajralish, fundamental funksiyalar va global yig‘ indi bahosi o‘ rtasidagi metodik bog‘ lanish saqlanadi. Olingan natija matritsaviy kompleks analizda interpolyatsiya nazariyasini rivojlantirish, zarur va yetarli mezonlarni izlash hamda boshqa klassik sohalarga umumlashtirish uchun nazariy asos yaratadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Garnett J. B. Ограниченные аналитические функции. — М.: Мир, 1984.

2. Earl J. P. On the interpolation of bounded sequences by bounded functions // Journal of the London Mathematical Society. — 1970.

3. Jones P. L∞-estimates for the δ-problem in a half-plane // Acta Mathematica. — 1983. — Vol. 150. — P. 137–152.

4. Berndtsson B. Interpolating sequences for H∞ in the ball // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1985. — Vol. 88. — P. 1–10.

5. Berndtsson B., Chang S.-Y. A., Lin K.-C. Interpolating sequences in the polydisc // Transactions of the American Mathematical Society. — 1987. — Vol. 302, No. 1.

6. Худайберганов Г., Кытманов А. М., Шаимкулов Б. А. Анализ в матричных областях. — 2017.

7. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p. — М.: Мир, 1984.

8. Ражабов С. Поликругда интерполяцион кетма-кетликлар // “Математика, механика ва информатика фанларининг ривожида истеъдодли ёшларнинг ўрни” илмий-амалий семинари тезислари тўплами. — Тошкент, 2014.