

NAMANGAN DAVLAT
UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI, [2026-8]
ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427



01.00.00-FIZIKA-MATEMATIKA
journal.namdu.uz
PHYSICS AND MATHEMATICS

BYANKI TURIDAGI FAZOVIIY-VAQT MODELLARIDA GEOMETRIK INVARIANTLAR VA KILLING SIMMETRIYALARI O'RTASIDAGI O'ZARO BOG'LIQLIK

Halimov O'ktam Haydarovich

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universitetining
Jizzax filiali amaliy matematika kafedrası katta o'qituvchisi

ORCID:0000-0002-6097-9252

uktamjonhalimov07@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada Bianchi turidagi bir jinsli, lekin anizotrop fazoviy-vaqt modellarining geometrik invariantlari hamda Killing vektor maydonlari orasidagi bog'lanish tahlil qilinadi. Asosiy e'tibor Riman egriligi tenzori, Ricci tenzori va Kretschmann invariantining fizik hamda geometrik mazmunini sodda usulda tushuntirishga qaratiladi. Killing vektor maydonlari fazoviy-vaqtning izometriyalarini ifodalashi, invariantlar esa egrilikning koordinatalardan mustaqil tavsifini berishi ko'rsatiladi. Bianchi I modeli uchun diagonal metrika misolida Hubble tipidagi yo'nalishli parametrlar orqali Kretschmann invariantining qulay ifodasi yoziladi. Shuningdek, simmetriya darajasi ortgan sari metrik funksiyalar soni va invariantlarning funksional murakkabligi qanday kamayishi tushuntiriladi. Natijada Killing simmetriyalari bilan invariant tahlil birgalikda qo'llanganda Bianchi modellarining geometrik farqlarini chuqurroq ochish mumkinligi asoslanadi.

Kalit so'zlar: Bianchi modeli, Killing vektor maydoni, izometriya, Kretschmann invarianti, Riman egriligi, anizotropiya, bir jinslilik.

ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ИНВARIANTАМИ И СИММЕТРИЕЙ КИЛЛИНГА В ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ МОДЕЛЯХ ТИПА БЬАНКИ

Аннотация. В данной статье анализируется связь между геометрическими инвариантами однородных, но анизотропных моделей пространства-времени типа Бианки и векторными полями Киллинга. Основное внимание уделяется простому объяснению физического и геометрического смысла тензора кривизны Римана, тензора Риччи и инварианта Кречмана. Показано, что векторные поля Киллинга представляют изометрии пространства-времени, а инварианты обеспечивают координатно-независимое описание кривизны. Для модели Бианки I на примере диагональной метрики приводится удобное выражение для инварианта Кречмана в терминах параметров направления типа Хаббла. Также объясняется, как уменьшается число метрических функций и функциональная сложность инвариантов с увеличением степени симметрии. В результате обосновывается, что геометрические различия моделей Бианки могут быть выявлены более глубоко при совместном использовании симметрий Киллинга.

Ключевые слова: модель Бианки, векторное пространство Киллинга, изометрия, инвариант Кречмана, кривизна Римана, анизотропия, однородность.

INTERRELATION BETWEEN GEOMETRIC INVARIANTS AND KILLING SYMMETRY IN BIANCHI- TYPE SPACE-TIME MODELS

Annotation. This article analyzes the connection between geometric invariants of homogeneous but anisotropic Bianchi-type space-time models and Killing vector fields. The focus is on a simple explanation of the physical and geometric meaning of the Riemann curvature tensor, Ricci tensor and Kretschmann invariant. It is shown that Killing vector fields represent isometries of space-time, and invariants provide a coordinate-independent description of curvature. For the Bianchi I model, using the diagonal metric as an example, a convenient expression for the Kretschmann invariant is given in terms of Hubble-type direction parameters. It also explains how the number of metric functions and the functional complexity of invariants decreases with increasing degree of symmetry. As a result, it is substantiated that the geometric differences of the Bianchi models can be revealed more deeply by using Killing symmetries together.

Keywords: Bianchi model, Killing vector space, isometry, Kretschmann invariant, Riemann curvature, anisotropy, homogeneity.

Kirish

Kosmologiyada fazoviy-vaqt modelini o'rganishda ikki savol muhim bo'ladi. Birinchisi: model qanday simmetriyaga ega? Ikkinchisi: modelning egrilik xossalari qanday? Birinchi savolga ko'pincha Killing vektor maydonlari yordamida, ikkinchisiga esa geometrik invariantlar yordamida javob beriladi. Shu sababli Bianchi modellarini chuqur tushunish uchun bu ikki yo'nalishni birgalikda tahlil qilish zarur.

Adabiyotlar tahlili

Bianchi modellar bir jinsli, ammo umumiy holda anizotrop kosmologik modellar sinfini tashkil etadi. Ular uch o'lchovli Lie algebra orqali tavsiflanadi va fazoviy kesimlarning bir jinsli bo'lishini ifodalaydi. Bunday modellar umumiy nisbiylik nazariyasida ham nazariy, ham amaliy ahamiyatga ega. Nazariy jihatdan ular Einstein tenglamalarining murakkab tizimlarini soddalashtiradi; amaliy jihatdan esa dastlabki Koinotning anizotrop bosqichlarini tavsiflashda qo'l keladi.

Mazkur maqolaning maqsadi Bianchi modellarida Killing simmetriyalari bilan egrilik invariantlari orasidagi ichki bog'lanishni tushuntirish va bu bog'lanishni sodd misollar orqali ko'rsatishdan iborat [1-3].

Killing simmetriyalari va invariantlar: asosiy tushunchalar

Fazoviy-vaqt (M, g) psevd-Riman ko'pxilligi bilan berilsin. Agar ξ vektor maydoni metrikani o'zgartirmasa, ya'ni

$$\mathcal{L}_\xi g_{ij} = 0,$$

bo'lsa, u holda ξ Killing vektor maydoni deyiladi. Bu shart kovariant hosila orqali

$$\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i = 0$$

ko'rinishda yoziladi. Mazkur tenglama Killing tenglamasi deb ataladi.

Killing vektor maydonlari fazoviy-vaqtning izometriyalarini bildiradi. Oddiy qilib aytganda, ular metrikani "buzmaydigan" siljitishlarni ifodalaydi. Masalan, Bianchi I modelida fazoviy koordinatalar bo'yicha translatsiyalar izometriya bo'lib, mos ravishda uchta mustaqil Killing maydoniga olib keladi:

$$\xi_{(1)} = \partial_x, \quad \xi_{(2)} = \partial_y, \quad \xi_{(3)} = \partial_z.$$

Geometrik invariantlar esa koordinata tanloviga bog'liq bo'lmagan sonli yoki funksional ifodalardir. Ulardan eng ko'p ishlatiladigani quyidagilar:

$$R, \quad R_{ij}R^{ij}, \quad K = R_{ijkl}R^{ijkl}.$$

Bu yerda R — skalyar egrilik, $R_{ij}R^{ij}$ — Ricci tenzorining kvadratik invarianti, K esa Kretschmann invariantidir.

Invariantlarning muhimligi shundaki, ular koordinata almashtirilganda o'zgarmaydi. Demak, ikki xil koordinatada yozilgan metrikalarning geometriyasini taqqoslashda invariantlar ishonchli mezon bo'lib xizmat qiladi.

Tadqiqot metodologiyasi.

Bianchi modellarida bir jinslilik va simmetriya

Bianchi modellarining umumiy ko'rinishi ko'pincha

$$ds^2 = -dt^2 + \gamma_{\alpha\beta}(t) \omega^\alpha \omega^\beta$$

shaklda yoziladi. Bu yerda ω^α — fazoviy bir jinslilikni ifodalovchi invariant 1-formalar, $\gamma_{\alpha\beta}(t)$ esa vaqtga bog'liq metrik koeffitsiyentlardir. 1-formalar quyidagi struktur tenglama bilan bog'langan:

$$d\omega^\alpha = \frac{1}{2} C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma,$$

bu yerda $C_{\beta\gamma}^\alpha$ — uch o'lchovli Lie algebraning struktura konstantalari.

Demak, Bianchi klassifikatsiyasi aslida fazoviy kesimning simmetriya algebrasiga asoslanadi. Shuning uchun Killing vektor maydonlari Bianchi modelining geometriyasida tashqi qo'shimcha obyekt emas, balki modelning ichki tuzilmasining bir qismidir.

Simmetriya darajasi oshgan sari ikki natija kuzatiladi. Birinchidan, metrikadagi mustaqil funksiyalar soni kamayadi. Ikkinchidan, egrilik invariantlarining ko'rinishi ko'pincha soddalashadi. Bu holat ayniqsa Bianchi I modelidan izotrop Fridman tipidagi holatga o'tganda yaqqol seziladi.

Natijalar va ularning tahlili.

Bianchi I modeli: sodd misol

Bianchi I modelining diagonal metrikasini

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) dx^2 + b^2(t) dy^2 + c^2(t) dz^2$$

ko'rinishda olaylik. Bu modelda fazoviy kesim yassi bo'lib, bir jinslilik uchta translatsiya orqali ifodalanadi. Shuning uchun kamida uchta Killing maydoni mavjud.

Endi

$$H_1 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad H_2 = \frac{\dot{b}}{b}, \quad H_3 = \frac{\dot{c}}{c}$$

belgilashlarni kiritamiz. U holda diagonal Bianchi I modelida Kretschmann invariantining qulay yozilishi

$$K = 4 \left[(\dot{H}_1 + H_1^2)^2 + (\dot{H}_2 + H_2^2)^2 + (\dot{H}_3 + H_3^2)^2 + H_1^2 H_2^2 + H_1^2 H_3^2 + H_2^2 H_3^2 \right]$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bu formuladan bir necha sodda xulosa chiqadi.

Birinchi xulosa: invariant to'liq ravishda uch yo'nalishdagi kengayish tezliklari orqali ifodalanadi. Demak, anizotropiya to'g'ridan to'g'ri K ga ta'sir qiladi.

Ikkinchi xulosa: agar $a = b = c = S(t)$ bo'lsa, model izotrop holatga o'tadi. Bu holda

$$H_1 = H_2 = H_3 = H = \frac{\dot{S}}{S},$$

va Kretschmann invariantining ifodasi ancha soddalashadi:

$$K = 12 \left[(\dot{H} + H^2)^2 + H^4 \right].$$

Bu yerda qo'shimcha aylanish simmetriyalari paydo bo'ladi. Shunday qilib, simmetriyaning ortishi invariant ko'rinishining soddalashishiga olib keladi.

Invariantlar va Killing simmetriyalari orasidagi bog'lanish

Killing maydonlari bilan invariantlar bir xil ma'noni anglatmaydi. Killing maydonlari "qanday o'zgarmaslik"ni, invariantlar esa "qanday egrilik"ni ko'rsatadi. Shunga qaramay, ular o'zaro chambarchas bog'liq.

Birinchi bog'lanish shundan iboratki, simmetriya algebrasi kattalashgan sari metrikadagi mustaqil funksiyalar kamayadi. Bu esa invariantlarning ham kamroq argumentli yoki soddaroq ko'rinishda yozilishiga olib keladi.

Ikkinchi bog'lanish shundaki, bir xil o'lchamli izometriya gruppasiga ega modellar invariantlar bo'yicha farqlanishi mumkin. Demak, faqat Killing maydonlari soni yetarli emas; invariantlar orqali egrilik tabiati ham tekshirilishi kerak.

Uchinchi bog'lanish esa fizik talqinga tegishli. Agar invariant juda tez o'sib borsa, u singulyarlik yaqinlashayotganini ko'rsatishi mumkin. Ammo Killing maydonlarining mavjudligi modelda qanday konservativ yoki geometrik cheklovlar borligini tushuntiradi. Demak, biri dinamik-geometrik "o'lchov", ikkinchisi esa strukturaviy "tartib" rolini bajaradi [3-5].

Ayrim Bianchi turlarining qiyosiy tavsifi

Qiyoslashni jadval ko'rinishida emas, sodda tavsif ko'rinishida berish qulayroq.

Bianchi I. Bu modelda fazoviy kesim yassi bo'lib, asosiy fazoviy simmetriya uchta translatsiya bilan ifodalanadi. Shu sababli invariantlar asosan vaqt bo'yicha kengayish parametrlari orqali yoziladi. Modelning algebraik tuzilmasi sodda bo'lgani uchun egrilik invariantlari ham nisbatan ixcham ko'rinishda bo'ladi.

Bianchi II. Bu holda fazoviy simmetriya guruhi noabel xarakterga ega. Demak, struktura konstantalar invariantlarning ko'rinishiga bevosita kiradi. Natijada egrilik Bianchi I ga qaraganda boyroq tuzilishga ega bo'ladi. Shu sababli Killing maydonlari soni o'xshash bo'lsa ham, invariantlarning algebraik ko'rinishi murakkabroq chiqadi.

Bianchi IX. Bu model fazoviy egrilikning kuchliroq namoyon bo'lishi bilan ajralib turadi. Simmetriya xossalari yaxshi rivojlangan bo'lsa-da, invariantlar va dinamika ko'pincha ancha murakkab bo'ladi. Ayniqsa anizotropiya kuchli bo'lgan bosqichlarda egrilik invariantlari katta rol o'ynaydi.

Bu qiyoslashdan ko'rinadiki, simmetriya darajasi bilan invariantlarning murakkabligi orasida bevosita chiziqli bog'lanish har doim ham yo'q. To'g'riroq xulosa shuki, Killing maydonlari metrikaning tuzilishini cheklaydi, invariantlar esa shu cheklanish ichida qolayotgan haqiqiy egrilik mazmunini ochib beradi.

Xulosa

Bianchi turidagi fazoviy-vaqt modellarini tahlil qilishda Killing vektor maydonlari va geometrik invariantlar bir-birini to'ldiruvchi ikkita asosiy vosita hisoblanadi. Killing maydonlari modelning izometriya xossalari, invariantlar esa egrilikning koordinatalardan mustaqil mazmunini ifodalaydi. Bianchi I misolida ko'rildiki, simmetriya darajasi ortgan sari metrik funksiya va invariantlarning ko'rinishi soddalashadi. Biroq faqat simmetriya soni geometriyani to'liq tavsiflash uchun yetarli emas; invariant tahlil ham zarur. Shuning uchun Bianchi modellarining to'liq tavsifi Killing simmetriyalari, Lie algebra tuzilmasi va egrilik invariantlarini birgalikda o'rganishni talab qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wald R. M. *General Relativity*. Chicago: University of Chicago Press.
2. Ryan M. P., Shepley L. C. *Homogeneous Relativistic Cosmologies*. Princeton University Press.
3. Ellis G. F. R., MacCallum M. A. H. A class of homogeneous cosmological models.
4. Stephani H., Kramer D., MacCallum M., Hoenselaers C., Herlt E. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*.
5. Hawking S. W., Ellis G. F. R. *The Large Scale Structure of Space-Time*.

References

1. Wald R. M. *General Relativity*. Chicago: University of Chicago Press.

2. Ryan M. P., Shepley L. C. Homogeneous Relativistic Cosmologies. Princeton University Press.
3. Ellis G. F. R., MacCallum M. A. H. A class of homogeneous cosmological models.
4. Stephani H., Kramer D., MacCallum M., Hoenselaers C., Herlt E. Exact Solutions of Einstein's Field Equations.
5. Hawking S. W., Ellis G. F. R. The Large Scale Structure of Space-Time.