NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI, [2026-8]
ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427

01.00.00-FIZIKA-MATEMATIKA
journal.namdu.uz
PHYSICS AND MATHEMATICS

UDK 517.55

# KO‘ P KOMPLEKS O‘ ZGARUVCHILI GOLOMORF FUNKSIYALAR QATORLARINING YAQINLASHISH XOSSALARI

**Gulhayo Safarboyeva**
Email: gulhayosafarboyeva@gmail.com
ORCID ID: 0009-0008-4853-9001

***Annotatsiya:*** *Ushbu maqolada ko‘ p kompleks o‘ zgaruvchili golomorf funksiyalar qatorlarining, xususan darajali qatorlarning, yaqinlashish nazariyasi tahlil qilinadi. Bir o‘ zgaruvchili holatdan farqli o‘ laroq, $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ fazoda yaqinlashish sohasi to‘ la logarifmik qavariq Reyngard sohasi ko‘ rinishida bo‘ ladi. Klassik Abel-Xartogs va Koshi-Adamar natijalari asosida qisman radiuslar va majoranta shartiga tayanuvchi tekis yaqinlashish mezoni taklif etilgan hamda uning isboti va konkret misolda tekshiruvi keltirilgan.*

***Kalit so‘ zlar:*** *golomorf funksiya, ko‘ p kompleks o‘ zgaruvchi, darajali qator, Reyngard sohasi, log-qavariqlik, Koshi-Adamar formulasi, plyurisubgarmonik ekstremal funksiya, tekis yaqinlashish.*

## СВОЙСТВА СХОДИМОСТИ РЯДОВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

***Аннотация.*** *В работе исследуется теория сходимости рядов голоморфных функций многих комплексных переменных, в частности степенных рядов. В отличие от одномерного случая, в $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ область сходимости имеет вид полной логарифмически выпуклой области Рейнхардта. На основе классических результатов Абеля-Хартогса и Коши-Адамара предложен критерий равномерной сходимости, связывающий частные радиусы и мажорантное условие; приведены схема доказательства и проверка на конкретном примере.*

***Ключевые слова:*** *голоморфная функция, многие комплексные переменные, степенной ряд, область Рейнхардта, логарифмическая выпуклость, формула Коши-Адамара, плюрисубгармоническая экстремальная функция, равномерная сходимость.*

## CONVERGENCE PROPERTIES OF SERIES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS OF SEVERAL COMPLEX VARIABLES

***Abstract.*** *This paper analyzes the convergence theory of series of holomorphic functions of several complex variables, in particular power series. Unlike the one-variable case, in $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ the domain of convergence has the form of a complete logarithmically convex Reinhardt domain. Based on the classical Abel-Hartogs and Cauchy-Hadamard results, a criterion for uniform convergence relating partial radii and a majorant condition is proposed, together with a proof outline and verification on a concrete example.*

***Keywords:*** *holomorphic function, several complex variables, power series, Reinhardt domain, logarithmic convexity, Cauchy-Hadamard formula, plurisubharmonic extremal function, uniform convergence.*

Ma’lumki, kompleks o‘ zgaruvchili funksiyalar nazariyasi XIX asrda Koshi, Riman va Veyershtrass tomonidan asos solingan bo‘ lib, uning ko‘ p o‘ zgaruvchiga umumlashmasi XX asr boshida F. Xartogs, P. Kuzen, K. Rayxardt va E. Kartan izlanishlari tufayli mustaqil yo‘ nalish sifatida shakllana boshladi [1, 320-b.]. Bitta o‘ zgaruvchidan ikkitaga o‘ tish shunchaki texnik murakkablashuv emas: $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ da hodisalar sifat jihatidan boshqacha tus oladi. Xartogs fenomeni tufayli funksiyaning «tabiiy chegarasi» tushunchasi o‘ z kuchini yo‘ qotadi, yaqinlashish sohalari esa ixtiyoriy shakldagi ochiq to‘ plam bo‘ la olmay, to‘ la Reyngard sohasi bo‘ lish va log-qavariqlik kabi qat’iy geometrik-analitik talablarga bo‘ ysunadi [2-4].

Mavzuning dolzarbligi shu bilan izohlanadiki, aynan shu nazariya psevdoqavariq sohalar, golomorfiya sohalari va analitik davomlantirish kabi zamonaviy kompleks tahlilning tayanch tushunchalarini shakllantiradi hamda matematik fizika va ko‘ p o‘ lchovli signallarni tahlil qilish masalalarida qo‘ l keladi. O‘ zbekiston kompleks analiz maktabi - A. Sadullayev, G. Xudayberganov, S.A. Imomqulov va boshqa olimlarning tadqiqotlari - plyurisubgarmonik funksiyalar,

plyuripolyar to‘ plamlar va golomorf funksiyalarning davomlantirilishi masalalarida xalqaro miqyosda tan olingan natijalarni bergan [5-8], shu bois bu yo‘ nalishni yanada rivojlantirish milliy ilm-fan uchun ham ahamiyatlidir.

Ishning maqsadi - ko‘ p o‘ zgaruvchili golomorf funksiyalar qatorlari yaqinlashishining klassik natijalarini bir tizimga jamlab, ularni zamonaviy plyuripotensial yondashuv bilan bog‘ lovchi hamda amaliy hisoblashga moslashtirilgan mezon ishlab chiqishdan iborat. Tadqiqotda majoranta usuli, logarifmik qavariqlik tahlili hamda J. Sisyak va V.P. Zaxaryuta tomonidan kiritilgan ekstremal plyurisubgarmonik funksiyalar apparati [9-10] qo‘ llanildi.

$\mathbb{C}^n$ fazoda $z = (z_1,\ldots,z_n)$ nuqta, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ ko‘ p indeks, $|\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_n$, $z^\alpha = z_1^{\alpha 1}\cdot\ldots\cdot z_n^{\alpha n}$ - bular standart belgilashlar. Nuqta atrofidagi ko‘ p o‘ lchovli darajali qator odatda quyidagicha yoziladi:

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} c_\alpha (z-a)^\alpha, \quad c_\alpha \in \mathbb{C}.$$

$D \subset \mathbb{C}^n$ sohada berilgan f funksiya golomorf deb ataladi, agar u har bir nuqta atrofida yuqoridagi ko‘ rinishdagi qator bilan yaqinlashuvchi tarzda ifodalansa. Bu ta’rif, aslida, har bir o‘ zgaruvchi bo‘ yicha alohida golomorflik ta’rifiga teng kuchli - bu ekvivalentlik aynan Xartogs teoremasining mazmunini tashkil qiladi [1].

Reyngard sohasi koordinatalar boshiga nisbatan quyidagi ma’noda invariant: $z = (z_1,\ldots,z_n) \in D$ bo‘ lsa, ixtiyoriy $\theta_1,\ldots,\theta_n \in \mathbb{R}$ uchun $(\exp(i\theta_1)z_1,\ldots,\exp(i\theta_n)z_n)$ ham D ga tegishli. Agar bundan tashqari $|z_j| \le |z_j^0|$ (j=1,…,n) shartini qanoatlantiruvchi barcha z nuqtalar, $z^0 \in D$ bo‘ lgan har qanday holatda D ga tegishli bo‘ lsa, soha to‘ la Reyngard sohasi deb ataladi.

Koshining ko‘ p o‘ lchovli integral formulasiga ko‘ ra, agar f funksiya $D = \{|z_j-a_j|<r_j\}$ politsilindrida uzluksiz bo‘ lib, uning yopilishida har bir o‘ zgaruvchi bo‘ yicha golomorf bo‘ lsa, ixtiyoriy $z \in D$ uchun

$$f(z) = (1/(2\pi i))^n \oint\ldots\oint f(\zeta) / ((\zeta_1-z_1)\ldots(\zeta_n-z_n))\, d\zeta_1\ldots d\zeta_n$$

bo‘ ladi [11]. Shu formuladan koeffitsientlar uchun $c_\alpha = (1/\alpha!)\cdot(\partial^{|\alpha|}f/\partial z^\alpha)(a)$ ifodasi va Koshi bahosi $|c_\alpha| \le M(r)/r^\alpha$ kelib chiqadi, bu esa keyingi barcha natijalarning texnik tayanchidir.

Xartogsning 1906 yildagi natijasiga ko‘ ra, agar f funksiya D sohada har bir o‘ zgaruvchi bo‘ yicha alohida golomorf bo‘ lsa, u D da barcha o‘ zgaruvchilar bo‘ yicha birgalikda ham golomorf bo‘ ladi - hech qanday qo‘ shimcha chegaralanganlik sharti talab qilinmaydi [1, 330-b.].

**1-teorema (Abel-Xartogs).** Agar $\Sigma\, c_\alpha z^\alpha$ qator $z^0=(z_1^0,\ldots,z_n^0)\neq 0$ nuqtada yaqinlashsa (yoki uning hadlari shu nuqtada chegaralangan bo‘ lsa), u holda bu qator

$$P(0,\theta z^0) = \{ z \in \mathbb{C}^n : |z_j| \le \theta |z_j^0|,\ j=1,\ldots,n \},\ 0<\theta<1$$

politsilindrida absolyut va tekis yaqinlashadi. Isbot: hadlarning chegaralanganligidan $|c_\alpha(z^0)^\alpha| \le M$ kelib chiqadi, bundan $|c_\alpha z^\alpha| \le M\cdot\theta^{|\alpha|}$ bahosi olinadi, chunki $|z_j/z_j^0| \le \theta$. Ko‘ p o‘ lchovli geometrik qatorning yaqinlashishi Veyershtrass majoranta alomati orqali tasdiqlanadi [1, 322-325-b.].

**2-teorema (Reyngard-Xartogs).** Ko‘ p o‘ lchovli darajali qatorning yaqinlashish sohasi D har doim to‘ la Reyngard sohasi bo‘ lib, quyidagi almashtirish ostidagi tasviri

$$L : (z_1,\ldots,z_n) \mapsto (\log|z_1|,\ldots,\log|z_n|) \in \mathbb{R}^n$$

qavariq to‘ plam (log-qavariq soha) hosil qiladi [2, 2-bob]. Bu teoremaning muhim oqibati shuki, $n \ge 2$ bo‘ lganda yaqinlashish sohasi ixtiyoriy shaklga ega bo‘ la olmaydi. Bundan tashqari, agar f funksiya biror $D_0 \subset D$ Reyngard sohasida golomorf bo‘ lsa, u $D_0$ ning log-qavariq qobig‘ i $\hat{D}_0$ gacha o‘ z-o‘ zidan golomorf davom ettiriladi - bu Xartogs fenomenining bevosita natijasi bo‘ lib, bir o‘ zgaruvchili nazariyada bunga o‘ xshash hodisa mavjud emas [3, 400-b.].

Bir o‘ zgaruvchili holatda yaqinlashish radiusi $R = 1/\limsup|c_n|^{1/n}$ formulasi orqali topiladi. Ko‘ p o‘ zgaruvchili holatda bunday yagona son mavjud emas - buning o‘ rniga yaqinlashish sohasini radial yo‘ nalishlar bo‘ yicha o‘ sish sur’ati orqali tavsiflashga to‘ g‘ ri keladi. Zaxaryuta va Sisyak tomonidan kiritilgan ekstremal plyurisubgarmonik funksiya

$$\psi_K(z) = \sup\{ u(z) : u \in PSH(\mathbb{C}^n),\ u \le 0 \text{ on } K,\ u(z) \le \log^+|z| + O(1) \}$$

$K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt to‘ plamning o‘ sish xarakteristikasi vazifasini bajaradi va umumlashgan Koshi-Adamar formulasida ishtirok etadi [9; 10]:

$$\limsup_{|\alpha|\to\infty} |c_\alpha|^{1/|\alpha|} \cdot \exp(\psi_K(\alpha)) \le 1 \iff \Sigma c_\alpha z^\alpha \text{ qatori K da tekis yaqinlashadi,}$$

**Taklif etilgan mezon.** Yuqoridagi klassik natijalarni birlashtirish orqali quyidagi amaliy mezon ilgari suriladi: agar log-qavariq to‘ la Reyngard sohasi D uchun har bir j=1,…,n bo‘ yicha

$$\rho_j := \left( \limsup_{|\alpha|\to\infty,\ \alpha j\text{-yo‘ nalish}} |c_\alpha|^{1/\alpha j} \right)^{-1}$$

shaklidagi qisman radiuslar mavjud bo‘ lsa hamda $\hat{D} = \{ z : |z_j| < \varrho_j,\ j=1,\ldots,n \}$ ning log-qavariq qobig‘ i sifatida qurilgan D uchun qo‘ shimcha ravishda

$$\Sigma_\alpha \sup_{z\in K} |z^\alpha| \cdot \limsup_{|\alpha|\to\infty} |c_\alpha|^{1/|\alpha|} < 1 \quad (K \subset\subset D \text{ kompakt uchun})$$

majoranta sharti bajarilsa, u holda qator K da tekis va absolyut yaqinlashadi, aksincha, agar chap tomondagi ifoda 1 dan katta bo‘ lsa, qator K ning biror qism to‘ plamida uzoqlashadi. Isbot sxemasi ikki qismdan iborat: yetarlilik qismi 1-teorema va Veyershtrass majoranta alomatini K ning chekli qism qoplamiga qo‘ llash orqali; zaruriylik qismi esa 2-teoremadan kelib chiqadigan D ning chegara xarakteristikasi hamda $\psi_K$ funksiyaning ekstremal xossasidan foydalanadi [9; 10].

Misol sifatida $f(z_1,z_2) = \Sigma_{k,m\geq 0}\ (k!\cdot m!)^{-1}\ z_1^k\ z_2^m$ qatorini ko‘ rib chiqamiz (bu funksiya aslida $\exp(z_1+z_2)$ ga teng). Bu holda $|c_{k,m}|^{1/(k+m)} \to 0$ bo‘ lgani sababli $\varrho_1=\varrho_2=\infty$, ya’ni qator butun $D=\mathbb{C}^2$ fazoda yaqinlashadi. Murakkabroq misol sifatida $f(z_1,z_2) = \Sigma_{k,m}\ z_1^k\ z_2^m/2^{k+2m}$ qatorida $\varrho_1=2$, $\varrho_2=4$ chiqadi, yaqinlashish sohasi esa $D = \{|z_1|<2\}\times\{|z_2|<4\}$ politsilindri bo‘ ladi - bu natija ham 2-teorema, ham taklif etilgan mezon bilan to‘ liq mos keladi.

**3-teorema (Montelning ko‘ p o‘ lchovli analogi).** $\{f_k\}$ golomorf funksiyalar ketma-ketligi $D \subset \mathbb{C}^n$ sohaning har bir kompakt qism to‘ plamida bir tekis chegaralangan bo‘ lsin. U holda $\{f_k\}$ dan D ning kompakt qism to‘ plamlarida tekis yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin, va bu limit funksiya ham D da golomorf bo‘ ladi [3; 4, 1-bob].

Olingan natijalar shuni ko‘ rsatadiki, ko‘ p kompleks o‘ zgaruvchili golomorf funksiyalar qatorlarining yaqinlashish nazariyasi bir o‘ zgaruvchili nazariyaning oddiy kengaytmasi emas - u sifat jihatidan o‘ ziga xos geometrik-analitik apparatni talab qiladigan mustaqil yo‘ nalishdir. Taklif etilgan mezonning afzalligi shundaki, u qisman radiuslar $\varrho_j$ - odatda oson hisoblanadigan miqdorlar - orqali ifodalangan bo‘ lib, umumiy ekstremal funksiya $\psi_K$ ni qurish zaruratini chetlab o‘ tadi. Shu bilan birga, mezon faqat log-qavariq qobig‘ i allaqachon aniq bo‘ lgan holatlar uchun to‘ g‘ ridan-to‘ g‘ ri ishlaydi; Reyngard bo‘ lmagan hollarda yondashuvni psevdoqavariqlik mezonlari bilan birlashtirish talab etiladi - bu masala keyingi tadqiqotlar mavzusi bo‘ lib qolishi mumkin [5-8].

Amaliy nuqtai nazardan, olingan natijalar analitik funksiyalarning ko‘ p o‘ lchovli approksimatsiyasida, integral tenglamalar nazariyasida hamda matritsali sohalardagi kompleks tahlilda [12] qo‘ l kelishi mumkin. Xalqaro adabiyot bilan solishtirganda [13; 14], ushbu maqoladagi yondashuvning o‘ ziga xosligi shundaki, u amaliy hisoblash uchun qulay bo‘ lgan qisman radiuslar tilida ifodalangan mezonni markazga qo‘ yadi.

Xulosa qilib aytganda, maqolada ko‘ p kompleks o‘ zgaruvchili golomorf funksiyalar darajali qatorlarining yaqinlashish nazariyasi izchil tarzda bayon etildi: Koshining ko‘ p o‘ lchovli integral formulasi, Abel-Xartogs lemmasi, yaqinlashish sohasining to‘ la log-qavariq Reyngard sohasi ekanligi haqidagi teorema, Montel tipidagi normal oilalar teoremasi hamda Sisyak-Zaxaryuta ekstremal funksiyasiga asoslangan umumlashgan Koshi-Adamar formulasi keltirildi. Ishning ilmiy natijasi sifatida qisman radiuslar va majoranta shartini bog‘ lovchi amaliy tekis yaqinlashish mezoni taklif etildi. Kelgusi tadqiqotlar taklif etilgan mezonni umumiy psevdoqavariq sohalarga umumlashtirish hamda O‘ zbekiston kompleks analiz maktabining plyuripolyarlik bo‘ yicha natijalari bilan chuqurroq bog‘ lash yo‘ nalishida davom ettirilishi mumkin [5-8].

**Adabiyotlar**

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть I. - М.: Наука, 1976. - 320 с.

2. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть II: Функции нескольких переменных. - М.: Наука, 1976. - 400 с.

3. Фукс Б.А. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. - М.: Физматгиз, 1962. - 420 с.

4. Krantz S.G. Function Theory of Several Complex Variables. - 2nd ed. - Providence, RI: AMS, 2001.

5. Sadullaev A. Plurisubharmonic functions and analytic sets. - Toshkent: O‘ zR FA Matematika instituti nashrlari.

6. Худайберганов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А. Комплексный анализ в матричных областях. - Красноярск: СФУ, 2017.

7. Imomkulov S.A. Extension of holomorphic and pluriharmonic functions with thin singularities on parallel sections // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. - 2006. - Vol. 253. - P. 131-143.

8. Imomkulov S.A., Ibragimov Z.Sh. Pluripolarity of graphs of Denjoy quasianalytic functions of several variables // Uzbek Mathematical Journal / arXiv:1202.0159, 2012.

9. Siciak J. On an extremal function and domains of convergence of series of homogeneous polynomials // Annales Polonici Mathematici. - 1961. - Vol. 10. - P. 297-307.

10. Zakharyuta V.P. Extremal plurisubharmonic functions, Hilbert scales, and isomorphisms of spaces of analytic functions of several variables. I, II // Teoriya Funktsiy, Funktsionalny Analiz i ikh Prilozheniya. - 1974. - Vyp. 19. - S. 133-157; Vyp. 21. - S. 65-83.

11. Hörmander L. An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. - 3rd ed. - Amsterdam: North-Holland, 1990.

12. Худайберганов Г. Трубасимон соҳаларда голоморф функциялар учун интеграл формулалар ва уларнинг татбиқи: PhD дис. автореферати материаллари. - Урганч давлат университети, 2021.

13. Khabibullin B.N., Tamindarova N.R. Uniqueness theorems for subharmonic and holomorphic functions of several variables on a domain // Azerbaijan Journal of Mathematics. - 2017. - Vol. 7, No. 1. - P. 70-79.

14. Abdullaev B.I., Imomkulov S.A., Sharipov R.A. Plurisubharmonic functions in calibrated geometry and q-convexity // Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. - 2018. - P. 1-11.