NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI, [2026-8]
ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427

01.00.00-FIZIKA-MATEMATIKA
journal.namdu.uz
PHYSICS AND MATHEMATICS

UDK 517.98

7-O‘ LCHAMLI METABELIAN FILIFORM LI ALGEBRASINING LOKAL DIFFERENSIYALLASHLARI

Yuldashev Inomjon G‘ ulomboy o‘ g‘ li
Nukus davlat pedagogika instituti Matematika kafedrasi
katta o‘ qituvchisi i.yuldashev1990@mail.ru
Tursinboyeva Xusnora
Nukus davlat pedagogika instituti 2-kurs talabasi
ORCID: 0009-0004-4268-5420

Annotatsiya; *Ushbu maqolada 7-o‘ lchamli metabelian filiform Li algebrasining lokal differentsiyallashlari o‘ rganiladi. Algebra bazis elementlari orasidagi Li ko‘ paytmalari yordamida differentsiyallash operatorining umumiy ko‘ rinishi aniqlanadi. Leibniz qoidasi asosida differentsiyallash matritsasi quriladi va lokal differentsiyallashlar fazosi oddiy differentsiyallashlar fazosi bilan bog‘ liqligi tahlil qilinadi. Olingan natijalar filiform Li algebralarining strukturaviy xususiyatlarini o‘ rganishda qo‘ llanishi mumkin.*

Kalit so‘ zlar: *Li algebra, filiform Li algebra, metabelian algebra, differentsiyallash, lokal differentsiyallash, differentsiyallash matritsasi.*

LOCAL DERIVATIONS OF A 7-DIMENSIONAL METABELIAN FILIFORM LIE ALGEBRA

Abstract; *This article examines the local derivations of 7-dimensional metabelian filiform Lie algebras. The general form of the derevation operator is determined using the Lie product between the base elements of the algebra. Based on Leibniz’s rule, a derevation matrix is constructed, and the relationship between the space of local derevations and the space of ordinary derevation is analyzed. The results obtained can be used to study the structural features of filiform Lie algebras.*

Keywords: *Lie algebras, filiform Lie algebras, metabelic algebras, derevation, local derevation, derevation matrix.*

ЛОКАЛЬНЫЕ ДЕРИВАЦИИ 7-МЕРНОЙ МЕТАБЕЛИАЛЬНОЙ ФИЛИФОРМЕННОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

Аннотация; *В данной статье рассматриваются локальные деривации 7-мерных метабелевых филиформных алгебр Ли. Общая форма оператора дифференцирования определяется с помощью произведения Ли между базовыми элементами алгебры. На основе правила Лейбница строится дифференциальная матрица и анализируется связь между пространством локальных дифференциаций и пространством обычных дифференциаций. Полученные результаты могут быть использованы для изучения структурных особенностей нитевидных алгебр Ли.*

Ключевые слова: *Алгебры Ли, филиформные алгебры Ли, метабелические алгебры, дифференцирование, локальное дифференцирование, дифференциальная матрица.*

Kirish. Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqiga ega bo‘ lgan amaliy matematika, informatika, raqamli iqtisodiyot fanlariga e’tibor kuchaytirildi. Jumladan, noassotsiativ algebralar va ularning operatorlariga doir fundamental tadqiqotlarning rivojlanishiga ham alohida e’tibor qaratildi. Bu fundamental tadqiqotlar doirasida Leibniz algebralarining lokal va 2-lokal differensiallashlarini o‘ rganish borasida salmoqli natijalarga erishildi. «Algebra va funktsional analiz» fanlarining ustivor yo‘ nalishlari bo‘ yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish asosiy vazifalar va faoliyat yo‘ nalishlari etib belgilangan qaror ijrosini ta’minlashda ham operatorlar algebralari differensiallashlar nazariyasini rivojlantirish muhim ahamiyatga ega. Li algebralari zamonaviy algebra, differensial geometriya va matematik fizikaning muhim yo‘ nalishlaridan biridir. Filiform Lie algebralari nilpotent Lie algebralar sinfining maksimal nilpotentlik indeksiga ega bo‘ lgan muhim oilasini tashkil qiladi.So‘ nggi yillarda Li algebralarida differentsiyallashlar va lokal differentsiyallashlar tushunchalari keng o‘ rganilmoqda. Oddiy differentsiyallashdan farqli ravishda lokal differentsiyallash har bir element uchun alohida differentsiyallash operatori orqali aniqlanadi. Ushbu ishda 7-o‘ lchamli metabelian filiform Lie algebra uchun differentsiyallash va lokal differentsiyallash operatorlarining matritsaviy ko‘ rinishi aniqlanadi.

Adabiyotlar tahlili. Yuqoridagi tushunchalar R.V. Kadison ishlarida keltirilgan va o‘ rganilgan[1]. Shu bilan birgalikda D.R. Larson va A.R. Sourour ishlarida ham keltirilgan [2]. Yuqorida ta’kidlab o‘ tilgn ishlar avtomorfizmlar, C^*-algebralar va operator algebralarning differentsiyallashlariga yaqin bo‘ lgan akslantirishlarning tavsifiga bag‘ ishlangan bir qator ishlarga turtki bo‘ ldi. D.R. Larson va A.R. Sourourlar $\mathcal{A} = B(X)$ tenglikni isbotlashdi. Sh.A.Ayupov va K.K.Kudaybergenovlar ba’zi chekli o‘ lchamli sodda Li va Leibniz algebralarining lokal avtomorfizmlarini o‘ rganganlar[5].

Tadqiqot metodologiyasi

L Li algebrasi bo‘ lsin. Quyidagi markaziy qatorlarni qaraylik:

$$\gamma^1 = \gamma\gamma, \quad \gamma^{k+1} = [\gamma^k, \gamma], \quad k \geq 1,$$
$$\gamma^{[1]} = \gamma, \quad L^{[s+1]} = [L^{[s]}, \gamma^{[s]}], \quad s \geq 1.$$

L Li algebrasi nilpotent deyiladi (mos ravishda, yechiluvchan), agar shunday $p \in \mathcal{N}$ ko‘ rinishdagi $\mathbb{L}^p = 0$ (mos ravishda, $\mathbb{L}^{[p]} = 0$). Bunda $k$eng kichik butun son $\mathbb{L}^k = 0$ tengligi L ning nilindeksi (yoki nilpotentlik kllasi) deyiladi. [4]

Abelian bo‘ lmagan L Li algebrasi metabelian deyiladi, agar $[L, L]$– abelian bo‘ lsa, ya’ni $L^{(2)} = 0$ bo‘ lsa. $n \geq 7$ o‘ lchamli metabelian filiform L Li algebrasini qaraymiz va ushbu

$$[e_1, e_i] = e_{i+1}, 2 \leq i \leq n-1,$$
$$[e_2, e_i] = e_{i+2} + e_{i+3}, 3 \leq i \leq n-2,$$
$$[e_2, e_{n-2}] = e_n.$$

munosabatlar o‘ rinli bo‘ luvchi $\{e_1, \dots, e_n\}$ bazisga ega bo‘ lsin[7].

$\boldsymbol{L-7}$o‘ lchamli Li algebra bo‘ lib, uning bazasi $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ va nol bo‘ lmagan ko‘ paytmalari

$$[e_1, e_2] = e_3,$$
$$[e_1, e_3] = e_4,$$
$$[e_1, e_4] = e_5,$$
$$[e_1, e_5] = e_6,$$
$$[e_1, e_6] = e_7,$$
$$[e_2, e_3] = e_5 + e_6,$$
$$[e_2, e_4] = e_6 + e_7$$

Bilan berilgan.

Li algebraning antisimmetrikligi sababli:

$$[e_i, e_j] = -[e_j, e_i]$$

bajariladi.

Bu algebra uchun

$$[L^2, L^2] = 0$$

bo‘ lganligi sababli u metabelian algebra deyiladi.

Differentsiyallash

Ta’rif-1. Agar $d: L \to L$ chiziqli akslantirish uchun quyidagi tenglik bajarilsa:

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)] \quad \forall x, y \in L$$

U holda ushbu akslantirish berilgan L algebrasining differensiallashi deyiladi.

Har bir basis elementi uchun

$$D(e_i) = \sum_{j=1}^{7} a_{ji} e_j$$

deb olinadi

Avvalo:

$$e_3 = [e_1, e_2]$$

tenglikdan foydalanib $D(e_3) = D([e_1, e_2])$ hosil qilanadi.

Leybnits qoidasi yordamida:

$$D(e_3) = [D(e_1), e_2] + [e_1, D(e_2)]$$

tenglik olinadi.

Xuddi shu usulida

$$e_4 = [e_1, e_3],$$
$$e_5 = [e_1, e_4],$$
$$e_6 = [e_1, e_5],$$
$$e_7 = [e_1, e_6]$$

uchun tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

Natijada differentsiyallash operatorining umumiy matritsasi quyidagi ko‘ rinishga ega bo‘ ladi:

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{11}+a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{32} & 2a_{11}+a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{42} & a_{21}+a_{32} & 3a_{11}+a_{22} & 0 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{52} & a_{21}+a_{42} & 2a_{21}+a_{32} & 4a_{11}+a_{22} & 0 \\ a_{71} & a_{72} & a_{62} & a_{52} & 2a_{21}+a_{42} & 3a_{21}+a_{32} & 5a_{11}+a_{22} \end{pmatrix}$$

Bu yerda $a_{ij} \in F$ixtiyoriy skalyarlar.

Lokal differentsiyallashlar

Ta'rif-2. Bizga $\Delta: L \to L$ chiziqli akslantirish berilgan bo' lsin. Agar L algebraning$\forall x \in L$ elementi uchun shunday D_x differensiallash topilib $\Delta(x) = D_x(x)$ tenglik bajarilsa, u holda Δ lokal differensiallash deyiladi.

Agar bu algebra uchun local differentsiyallash operatori ham yuqoridagi differentsiyallash matritasisi bilan aniqlanadi:

$$LocDer(L) = Der(L)$$

ya'ni har bir local differentsiyallash oddiy ma'noda differentsiyallash hisoblanadi.

Muhokama va munozara

Olingan natija shuni ko' rsatadiki, 7 o' lchamli metabelian filiform Li algebra uchun differentsiyallashlar strukturasi yuqori uchburchak ko' rinishiga ega. Bu holat filiform Li algebralarning tabiiy gradatsiyasi bilan bog' liq.

Differentsiyallash matritasining diagonal elementlari

$$a_{11}, a_{11}+a_{22}, 2a_{11}+a_{22}, \ldots, 5a_{11}+a_{22}$$

ko' rinishida ketma-ket o' suvchi struktura hosil bo' ladi.

Bu esa algebra ichki strukturasi differentsiyallashlar orqali qanday saqlanishini ko' rsatadi.

Xulosa

Ushbu maqolada, 7-o' lchamli metabelian filiform Li algebra uchun differentsiyallash operatorining umumiy ko' rinishi topiladi.

Asosiy natija

$$LocDer(L) = Der(L)$$

bo' lib, local differentsiyallashlar fazosi oddiy differentsiyallashlar fazosi bilan ustma-ust tushushi ko' rsatiladi.

Differentsiyallash operatorining matritasisi ko' rinishda beriladi.

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{11}+a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{32} & 2a_{11}+a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{42} & a_{21}+a_{32} & 3a_{11}+a_{22} & 0 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{52} & a_{21}+a_{42} & 2a_{21}+a_{32} & 4a_{11}+a_{22} & 0 \\ a_{71} & a_{72} & a_{62} & a_{52} & 2a_{21}+a_{42} & 3a_{21}+a_{32} & 5a_{11}+a_{22} \end{pmatrix}$$

Foydalanilgan adabiyotlar ro' yxati.

1. R.V. Kadison, Local derivations, *J. Algebra*, 130 (1990) 494-509.

2. D. R. Larson, A. R. Sourour, Local derivations and local automorphisms of *B(X), Proc. Sympos. Pure Math*. 51 (1990) 187-194.

3. I.Kaygorodov, K.K.Kudaybergenov, I.G' .Yuldashev. Local derivations of semisimple Leibniz algebras // CIMPA School "Nonassociative Algebras and Its Applications", Madagascar. Communications in Mathematics 30 (2022), DOI: https://doi.org/10.46298/cm.9274.

4. I.G' .Yuldashev. Local derivations on solvable Lie algebras with a filiform nilradical // "Qoraqalpog' istonda fan va ta'lim" 2021-yil 4-son (18).

5. Ayupov Sh.A., Arzikulov F.N. Description of 2-local and local derivations on some Lie rings of skew-adjoint matrices // Journal of Linear and Multilinear Algebra. 68(4) (2020), p. 764-780.

6. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Nurjanov B., Alauadinov A. Local and 2-Local derivations on noncommutative arens algebras // Mathematic Slovaca. 64 (2014), p. 423–432.

7. B. Verbeke, Almost-inner derivations of Lie algebras, Master dissertation, KuLeuven Faculty of Science, 2016.

8. B. Verbeke, Almost inner derivations of Lie algebras, PhD dissertation, Ku Leuven Faculty of Science, 2020.