NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI, [2026-8]
ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427

01.00.00-FIZIKA-MATEMATIKA
journal.namdu.uz
PHYSICS AND MATHEMATICS

UDK 519.6

REAL JARAYONLARNI MATEMATIK MODELLASHTIRISH VA ULARNI SONLI TAHLIL QILISH

Ergasheva Dilnoza Bahodurovna
dilya.9524@gmail.com

Annotatsiya; *Ushbu ilmiy maqolada real jarayonlarni matematik modellashtirishning nazariy asoslari, modelni qurish bosqichlari va uni sonli usullar yordamida tadqiq etish masalalari tizimli ravishda tahlil qilinadi. Real hodisani soddalashtirish, matematik tenglamalar tizimini shakllantirish, model parametrlarini identifikatsiyalash va natijalarni validatsiya qilish jarayonlari yoritiladi. Differensial tenglamalar, optimallashtirish, statistik va ehtimollik modellari hamda ierarxik modellar qo‘ llanishining o‘ ziga xos jihatlari ko‘ rib chiqiladi. Sonli tahlilda chekli ayirmalar, chekli elementlar, iteratsion va Monte-Karlo usullarining imkoniyatlari tavsiflanadi. Zamonaviy hisoblash texnologiyalari, jumladan Python, MATLAB, parallel hisoblash va grafik vizualizatsiyaning modellashtirishdagi o‘ rni asoslanadi. Model adekvatligi, ishonchliligi, noaniqlik va hisoblash xatoliklarini baholashga alohida e’tibor qaratiladi. Tahlil natijalari matematik modellashtirish murakkab real jarayonlarni tushuntirish, prognozlash va boshqarish uchun samarali ilmiy-amaliy vosita ekanini ko‘ rsatadi.*

Kalit so‘ zlar: *matematik modellashtirish, real jarayonlar, sonli tahlil, differensial tenglamalar, optimallashtirish, sezgirlik tahlili, model adekvatligi, raqamli hisoblash usullari.*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ И ИХ ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Аннотация*; В статье системно рассматриваются теоретические основы математического моделирования реальных процессов, этапы построения модели и вопросы её численного исследования. Раскрываются процедуры упрощения реального явления, формирования системы математических уравнений, идентификации параметров и валидации результатов. Анализируются дифференциальные, оптимизационные, статистические, вероятностные и иерархические модели. Рассматриваются возможности конечно-разностных, конечно-элементных, итерационных и Монте-Карло методов. Особое внимание уделяется применению современных вычислительных технологий, программных средств и визуализации результатов. Отдельно рассматриваются адекватность, достоверность, неопределённость и погрешности численного решения. Показано, что математическое моделирование является эффективным инструментом исследования, прогнозирования и управления сложными процессами.*

Ключевые слова: *математическое моделирование, реальные процессы, численный анализ, дифференциальные уравнения, оптимизация, анализ чувствительности, адекватность модели, численные методы.*

MATHEMATICAL MODELING OF REAL PROCESSES AND THEIR NUMERICAL ANALYSIS

Abstract*; This paper systematically examines the theoretical foundations of mathematical modeling of real processes, the main stages of model construction, and numerical analysis of model solutions. The study considers simplification of a real phenomenon, formulation of mathematical equations, parameter identification, and model validation. Differential-equation, optimization, statistical, probabilistic, and hierarchical models are discussed. The capabilities of finite-difference, finite-element, iterative, and Monte Carlo methods are outlined. The role of modern computational technologies, software tools, parallel computing, and visualization is highlighted. Particular attention is paid to model adequacy, reliability, uncertainty, and numerical errors. The analysis shows that mathematical modeling provides an effective scientific and practical framework for understanding, forecasting, and controlling complex real processes.*

Keywords: *mathematical modeling, real processes, numerical analysis, differential equations, optimization, sensitivity analysis, model adequacy, computational methods.*

Kirish (Introduction)

Matematik modellashtirishning mohiyati o‘ rganilayotgan real jarayonni uning eng muhim xususiyatlarini saqlagan holda matematik tenglamalar, tengsizliklar yoki funksional munosabatlar ko‘ rinishida ifodalashdan iborat. Bu jarayon real

hodisani soddalashtirish, sxemalashtirish va olingan sxemani turli matematik apparatlar yordamida tavsiflash bosqichlarini o‘ z ichiga oladi.

Ushbu maqolaning maqsadi real jarayonlarni matematik modellashtirishning nazariy asoslari, bosqichlari, qo‘ llaniladigan usullari va sonli tahlil qilish imkoniyatlarini tizimli ravishda yoritish, shuningdek, modellashtirish jarayonida yuzaga keladigan muammolar va ularni hal qilish yo‘ llarini ko‘ rsatishdan iborat.

Zamonaviy ilm-fan va texnikaning rivojlanishi murakkab real jarayonlarni chuqur o‘ rganish va boshqarishni talab qiladi. O‘ zbekiston Respublikasida ham matematika sohasidagi ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish, amaliy matematikani kuchaytirish hamda iqtisodiyot tarmoqlaridagi muammolarni modellashtirish asosida matematik yechimlar ishlab chiqish ustuvor yo‘ nalish sifatida belgilangan [1]. Matematika ta’limi va fanini rivojlantirishga qaratilgan davlat siyosatida matematik tadqiqotlarning amaliy yo‘ naltirilishi ham alohida ta’kidlangan [2].

Bugungi kunda iqtisodiyot, ekologiya, muhandislik, biologiya va tibbiyot kabi turli sohalarda yuz beradigan jarayonlarni tushunish va prognoz qilish matematik modellashtirish usullarisiz tasavvur etib bo‘ lmaydi. Matematik modellar real obyekt, hodisa yoki jarayonni matematik shaklda ifodalab, uning xatti-harakatini oldindan bashorat qilishga xizmat qiluvchi vositadir.

Real jarayonlarni matematik modellashtirishda parametrlarni identifikatsiya qilish, chegaraviy va boshlang‘ ich shartlarni aniqlash, model adekvatligini tekshirish hamda eksperimental ma’lumotlar bilan solishtirish muhim hisoblanadi. Sonli algoritmlarning barqarorligi, yaqinlashuvi va hisoblash murakkabligi alohida baholanadi. Parallel hisoblash texnologiyalari, GPU va bulutli hisoblash infratuzilmasi katta o‘ lchamli modellarni tezkor yechish imkonini beradi.

Mavzuga oid adabiyotlarning tahlili (Literature Review)

Matematik model real obyekt, jarayon yoki hodisaning muhim xususiyatlarini aks ettiradigan va uni o‘ rganish hamda yangi axborot olish maqsadida asl obyekt o‘ rnini bosa oladigan tizimdir. Matematik model real jarayonlarni matematik tushunchalar, tenglamalar, tengsizliklar va funksional munosabatlar orqali ifodalaydi.

Matematik modellashtirish bo‘ yicha zamonaviy adabiyotlarda modelni qurish bilan bir qatorda uning adekvatligi, sonli yechimning aniqligi va hisoblash samaradorligi muhim mezonlar sifatida qaraladi. Oddiy differensial tenglamalarni sonli yechish masalalari uchun Griffiths va Higham sonli usullarni nazariy tahlil bilan birga amaliy hisoblash misollari orqali yoritadi [4]. Xususiy hosilali differensial tenglamalarni modellashtirish va sonli yaqinlashtirish masalalari Le Dret va Lucquin tomonidan tizimli ko‘ rib chiqilgan [5]. Sezgirlik tahlili esa model chiqishining parametrlar o‘ zgarishiga bog‘ liqligini baholashda muhim vosita hisoblanadi [8].

Mavjud manbalar asosida matematik modellarni deterministik va stoxastik, statik va dinamik, diskret va uzluksiz turlarga ajratish mumkin. Murakkab tizimlar uchun ierarxik modellar va ularni qisqartirish masalalari ham muhim yo‘ nalishlardan biridir. Mazkur yondashuvlar real jarayonni ortiqcha murakkablashtirmasdan, asosiy sifat va miqdoriy xususiyatlarini saqlashga imkon beradi.

Tadqiqot metodologiyasi (Research Methodology)

Tadqiqot metodologiyasi matematik modellashtirishning tizimli bosqichli yondashuviga asoslanadi. Bunda avvalo tadqiqot maqsadi aniqlanadi, real jarayon o‘ rganilib soddalashtiriladi, matematik tenglamalar tizimi shakllantiriladi, noma’lum parametrlar tajriba yoki mavjud ma’lumotlar asosida identifikatsiyalanadi va model natijalari real jarayon ma’lumotlari bilan taqqoslanadi. Ushbu ketma-ketlik modelning ishonchliligi va validatsiyasini ta’minlashga xizmat qiladi.

Matematik modelni qurish quyidagi besh asosiy bosqichni o‘ z ichiga oladi: 1) maqsadni aniqlash; 2) real jarayonni o‘ rganish va soddalashtirish; 3) matematik tenglamalar tizimini shakllantirish; 4) model parametrlarini identifikatsiyalash; 5) modelni tekshirish (validatsiya). Model yetarli aniqlikda ishlamasa, parametrlar va farazlar qayta ko‘ rib chiqiladi.



1-rasm. Matematik modelni qurishning umumiy bosqichlari

Manba: muallif tomonidan maqola mazmuni asosida ishlab chiqilgan.

1-jadval. Matematik modellashtirishda qo‘ llaniladigan asosiy yondashuvlar

Model/usul	Asosiy vazifa	Qo‘ llanish xususiyati

Differensial tenglamalar	Dinamik jarayonlarni tavsiflash	Vaqt va fazo bo‘ yicha o‘ zgaruvchi jarayonlar
Optimallashtirish	Maqsad funksiyasining ekstremumini topish	Resurs taqsimoti, rejalashtirish, logistika
Statistik/ehtimollik modellar	Noaniqlik va tasodifiylikni hisobga olish	Risk, ishonchlilik, regression va korrelyatsiya
Chekli ayirmalar	Differensial tenglamani diskretlashtirish	To‘ rli hisoblash va chegaraviy masalalar
Chekli elementlar	Murakkab geometriyadagi masalalarni yechish	Muhandislik va ko‘ p o‘ lchovli sohalar
Monte-Karlo	Tasodifiy tanlash asosida hisoblash	Ko‘ p o‘ lchovli va ehtimollik masalalari

Izoh: jadval maqolada ko‘ rib chiqilgan modellashtirish va sonli tahlil usullarining funksional vazifalarini umumlashtiradi.

Ko‘ plab real jarayonlar oddiy yoki xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan ifodalanadi. Umumiy ko‘ rinishda $dy/dt=f(t,y)$, $y(t_0)=y_0$. Eyler usulida $y_{n+1}=y_n+h\,f(t_n,y_n)$ ko‘ rinishidagi yaqinlashish olinadi. Runge–Kutta 4-tartibli usuli esa yuqoriroq aniqlikka erishish imkonini beradi. Issiqlik tarqalishi kabi jarayonlar uchun $\partial u/\partial t=a^2\partial^2u/\partial x^2$ ko‘ rinishidagi tenglamalardan foydalaniladi.

Hisoblash tajribasida Python (NumPy, SciPy), MATLAB va Maple kabi vositalardan foydalanish mumkin. Mazkur dasturiy muhitlar parametrlarning sezgirlik tahlili, sonli integrallash, optimallashtirish va natijalarni jadval hamda grafiklar orqali baholash imkonini beradi.

Tahlil va natijalar (Analysis and Results)

Matematik modellar quyidagi maqsadlarda ishlab chiqiladi: fizikaviy, kimyoviy va texnologik jarayonlarni tavsiflash; jarayon va tizimlarni tadqiq qilish; texnologik jarayonlarni loyihalash; loyihalashda optimallashtirish ishlarini olib borish. Modellashtirishda modeldagi eksperiment originaldagi eksperimentga qaraganda soddaroq, tejamkorroq va xavfsizroq bo‘ lishi, shuningdek, model sinovi asosida original parametrlarini hisoblash qoidasi ma’lum bo‘ lishi talab etiladi.

Matematik tavsifning mukammallik darajasiga ko‘ ra, bir tomonda jarayonning barcha asosiy tomonlarini tavsiflaydigan tenglamalar to‘ la tizimi va barcha sonli qiymatlari ma’lum bo‘ lgan holat, ikkinchi tomonda esa jarayonning to‘ la matematik tavsifi mavjud bo‘ lmagan holat turadi. Axborot to‘ liq bo‘ lmagan sharoitda tadqiqotni eng oddiy modellar qurishdan boshlash, biroq jarayonning asosiy sifat xususiyatlarini buzmaslik maqsadga muvofiq.

Differensial tenglamalar asosida modellashtirish

Differensial tenglamalar dinamik tizimlarni tavsiflashda asosiy vosita bo‘ lib xizmat qiladi. Ular vaqt bo‘ yicha o‘ zgaruvchi fizik, iqtisodiy, ekologik va boshqa jarayonlarni matematik ifodalash imkonini beradi. Oddiy differensial tenglamalar bir o‘ zgaruvchili funksiyalarni, xususiy hosilali differensial tenglamalar esa ko‘ p o‘ zgaruvchili funksiyalarni tavsiflaydi. Issiqlik tarqalishida Furye tenglamasi, to‘ lqin tarqalishida to‘ lqin tenglamasi, populyatsiya dinamikasida Lotka–Volterra tenglamalari qo‘ llaniladi [5].

So‘ nggi yillarda kasr tartibli differensial tenglamalar murakkab real jarayonlarni, xususan, xotira effektiga ega bo‘ lgan tizimlarni modellashtirishda qo‘ llanilmoqda. Bunday modellar iqtisodiy va ekologik tizimlar hamda atrof-muhit dinamikasini o‘ rganishda qo‘ llanish imkoniyatiga ega.

Optimallashtirish modellari

Optimallashtirish modellari berilgan cheklovlar ostida ma’lum bir maqsad funksiyasining ekstremumini topish masalalarini hal qiladi. Bu modellar iqtisodiyotda resurslarni optimal taqsimlash, ishlab chiqarishni rejalashtirish va logistika masalalarini yechishda qo‘ llaniladi. Chiziqli va nochiziqli optimallashtirish, butun sonli va ko‘ p kriteriyali optimallashtirish kabi usullar mavjud.

Statistik va ehtimollik modellari

Real jarayonlarda tasodifiylik va noaniqlik omillari mavjud bo‘ lishi mumkin. Bunday hollarda statistik va ehtimollik modellari qo‘ llaniladi. Regression va korrelyatsion tahlil tajriba natijalarini qayta ishlash va o‘ zgaruvchilar orasidagi bog‘ lanishlarni aniqlashda muhim rol o‘ ynaydi. Ehtimollik modellari riskni baholash, ishonchlilik nazariyasi, navbatlar nazariyasi va moliyaviy matematika kabi sohalarda qo‘ llaniladi.

Ierarxik modellar va modellarni qisqartirish

Murakkab real tizimlar ko‘ pincha ierarxik tuzilishga ega bo‘ ladi. Bunday tizimlarni modellashtirishda elementlarning ishlash jarayonlari turli darajalarda funksional munosabatlar yoki mantiqiy shartlar ko‘ rinishida yoziladi.

Ierarxik modellarni qisqartirish (reduksiya) omillar sonini kamaytirish orqali hisoblash jihatidan kam resurs talab qiladigan modelga o‘ tishni anglatadi. Bu masalada omillar bo‘ yicha sezgirlik tahlili muhim vosita hisoblanadi [9].

Matematik modellarni sonli tahlil qilish

Ko‘ pgina real jarayonlarning matematik modellari analitik usullar bilan yechib bo‘ lmaydigan murakkab tenglamalar tizimidan iborat. Bunday hollarda sonli usullar — yaqinlashgan yechimlarni topish usullari — muhim ahamiyat kasb etadi. Sonli usullar kompyuter texnologiyalari yordamida murakkab matematik modellarni hisoblash va tahlil qilish imkonini beradi [4].

Asosiy sonli usullarga chekli ayirmalar, chekli elementlar, variatsion va proyeksion, Monte-Karlo hamda iteratsion usullar kiradi. Chekli ayirmalar usuli differensial tenglamalarni chekli ayirmali analoglar bilan almashtirishga asoslanadi. Chekli elementlar usuli murakkab geometriyali sohalarda differensial tenglamalarni yechishda qo‘ llaniladi. Monte-Karlo usuli statistik tajribalar asosida hisoblashni tashkil etadi [6; 7].

Modellarni raqamli hisoblashda zamonaviy yondashuvlar

Zamonaviy hisoblash texnologiyalari murakkab differensial tenglamalar tizimlarini yuqori aniqlikda yechish, katta hajmdagi hisoblashlarni parallel tizimlarda bajarish, model natijalarini grafik va 3D ko‘ rinishda vizualizatsiya qilish, model sezgirligi va noaniqligini tahlil qilish hamda optimallashtirish masalalarini avtomatik yechish imkoniyatlarini beradi.

Xususan, q-HATM (q-homotopy analysis transform technique) kabi yarim analitik usullar kasr tartibli differensial tenglamalar bilan ifodalangan modellar uchun tez yaqinlashuvchi qator yechimlarini olish imkonini beradi. Bunda yechimlarning yaqinlashuvi va yagonaligini matematik asoslash imkoniyati muhim xususiyat hisoblanadi.

Model adekvatligi va ishonchliligi

Matematik modelning real jarayonga monandligini tekshirish modellashtirish jarayonining muhim bosqichidir. Buning uchun obyektdan olingan o‘ lchovlar natijalari o‘ xshash sharoitlardagi model bashorat natijalari bilan taqqoslanadi. Agar model yetarli aniqlikda ishlamasa, uni qayta ko‘ rib chiqish va takomillashtirish zarur.

Matematik modelni qurishda real hodisani soddalashtirish zaruriyati bilan uning asosiy xususiyatlarini saqlab qolish o‘ rtasida muvozanat saqlash muhim. Jarayonga ta’sir qiluvchi barcha eng muhim omillar modelda hisobga olinishi, lekin ko‘ plab ikkinchi darajali omillar bilan modelni ortiqcha murakkablashtirmaslik kerak.

Har qanday matematik model ma’lum darajadagi noaniqlik va xatoliklarga ega. Ularning asosiy manbalari dastlabki ma’lumotlarning noaniqligi, modelning soddalashtirilganligi, sonli usullarning yaqinlashish xatoligi va hisoblash xatoliklaridir. Noaniqlik va xatoliklarni baholash model natijalarining ishonchlilik darajasini aniqlash imkonini beradi.

Tahlil natijasida shuni ko‘ rish mumkinki, modelning amaliy qiymati faqat matematik tenglamani tuzish bilan belgilanmaydi. Modelning natijasi parametrlarning ishonchli aniqlanishi, tanlangan sonli usulning barqarorligi, hisoblash aniqligi va real ma’lumotlar bilan validatsiya darajasiga bog‘ liq. Shu sababli modellashtirish jarayonida nazariy, hisoblash va eksperimental bosqichlarning uzviyligi ta’minlanishi kerak.

Xulosa va takliflar (Conclusion/Recommendations)

Real jarayonlarni matematik modellashtirish va ularni sonli tahlil qilish zamonaviy ilm-fan va texnikaning ajralmas qismiga aylangan. Matematik modellar murakkab tizimlarni o‘ rganish, ularning xatti-harakatini prognoz qilish va boshqarishda samarali vosita bo‘ lib xizmat qilmoqda.

Tadqiqot doirasida model qurishning maqsadni aniqlash, real jarayonni soddalashtirish, matematik tenglamalarni shakllantirish, parametrlarni identifikatsiyalash va validatsiya qilishdan iborat besh bosqichli ketma-ketligi tizimlashtirildi. Sonli tahlil vositalari orasida masalaning matematik tabiatiga mos usulni tanlash, hisoblash xatoligini nazorat qilish va model natijalarini real ma’lumotlar bilan taqqoslash muhim ekanligi aniqlandi.

Amaliy jihatdan modellashtirishda quyidagi takliflarni ilgari surish mumkin: birinchidan, modelni qurishdan oldin maqsad va asosiy ko‘ rsatkichlarni aniq belgilash; ikkinchidan, ikkilamchi omillar bilan modelni ortiqcha murakkablashtirmaslik; uchinchidan, parametrlarni eksperimental ma’lumotlar asosida identifikatsiyalash; to‘ rtinchidan, model adekvatligini mustaqil ma’lumotlar bilan tekshirish; beshinchidan, sonli algoritmlarning barqarorligi, yaqinlashuvi va hisoblash murakkabligini baholash. Kelgusidagi tadqiqotlarda real ma’lumotlarga asoslangan kompyuter tajribalari, noaniqliklarni miqdoriy baholash va yuqori unumli hisoblash vositalaridan foydalanishni kengaytirish maqsadga muvofiq.

Foydalanilgan adabiyotlar (References)

1. O‘ zbekiston Respublikasi Prezidenti. Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘ g‘ risida. 07.05.2020. [Elektron manba].

2. O‘ zbekiston Respublikasi Prezidenti. Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘ llab-quvvatlash, shuningdek, O‘ zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘ g‘ risida. 09.07.2019. [Elektron manba].

3. O‘ zbekiston Respublikasi Prezidenti. Ilm-fanni 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘ g‘ risida. 29.10.2020. [Elektron manba].

4. Griffiths D.F., Higham D.J. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations: Initial Value Problems. Springer, 2010.

5. Le Dret H., Lucquin B. Partial Differential Equations: Modeling, Analysis and Numerical Approximation. Springer, 2016.

6. Sabelfeld K.K. Monte Carlo Methods in Boundary Value Problems. Springer, 1991.

7. Müller-Gronbach T., Novak E., Ritter K. Monte Carlo-Algorithmen. Springer, 2012.

8. Borgonovo E. Sensitivity Analysis: An Introduction for the Management Scientist. Springer, 2017.

9. Sysoev A.S., Pogodaev A.K., Saraev P.V. Reduction of hierarchical models: researching sensitivity by factors using analysis of finite fluctuations // UBS. 2025. №113. B. 21–36.

10. Matematik modellashtirish yordamida real dunyo muammolarini yechish // Science and Research. 2025. 21-may. B. 1015–1019.

11. A robust technique to study fractional model describing economic and environmental mathematical system // Engineering Computations. 2025.

12. Uzbekistan Journal of Mathematics and Computer Science (UJMCS). Toshkent: TDTU, 2025.

13. Ishlab chiqarish jarayonlarini modellashtirish. O‘ quv qo‘ llanma. Toshkent, 2018. 85 b.

14. Differential Equations in Digital Modeling of Processes // Neliti. 2025. 9-iyun.