NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI, [2026-8]
ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427

01.00.00-FIZIKA-MATEMATIKA
journal.namdu.uz
PHYSICS AND MATHEMATICS

UO‘ K 519.644

BIR TUR “DIFFERENSIAL KVADRATURA” FORMULALARINING QIYOSIY TAHLILI TO‘ G‘ RISIDA

Djuraqulov Raxmatjon
Andijon qishloq xo‘ jaligi va agrotexnologiyalar instituti
ORCID:0009-0007-6907-7486
Umarov Raxmatilla Akramovich
Andijon qishloq xo‘ jaligi va agrotexnologiyalar instituti
ORCID: 0009-0004-4778-4444
E-mail:r.umarov1975@mail.ru

Annotatsiya. *Ushbu maqolada aniq integrallarni taqribiy hisoblashda qo‘ llaniladigan kvadratura formulalarining ayrim turlari o‘ zaro qiyosiy jihatdan tahlil qilingan. Tadqiqotning asosiy maqsadi “differensial” kvadratura formulalari deb ataluvchi formulalar bilan Teylor–Makloren qatorlari asosida hosil qilingan taqribiy formulalar o‘ rtasidagi bog‘ liqlikni aniqlashdan iborat. Mualliflar hisoblash matematikasining muhim yo‘ nalishlaridan biri bo‘ lgan aniq integrallarni taqribiy hisoblash masalasini nazariy va amaliy jihatdan yoritib, ushbu formulalarning tuzilishi hamda hosil qilinish mexanizmlarini o‘ rganadilar. Mazkur tadqiqot kvadratura formulalarining algebraik xossalarini chuqurroq anglashga xizmat qiladi.*

Kalit so‘ zlar. *Kvadratura formulasi, chap bir nuxtali formular, o‘ ng bir nuxtali formula, aniq integral, Teylor formulasi, Makloren formulasi.*

О СРАВНИТЕЛЬНОМ АНАЛИЗЕ ОДНОГО ТИПА «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ» ФОРМУЛ

Аннотатsiя: *В данной статье проводится сравнительный анализ некоторых типов квадратурных формул, используемых при приближенном вычислении определенных интегралов. Основная цель исследования – определить связь между так называемыми «дифференциальными» квадратурными формулами и приближенными формулами, созданными на основе рядов Тейлора-Маклорена. Авторы освещают с теоретической и практической точки зрения проблему приближенного вычисления определенных интегралов, являющуюся одной из важных областей вычислительной математики, а также изучают структуру и механизмы образования этих формул. Данное исследование служит углублению понимания алгебраических свойств квадратурных формул.*

Ключевые слова. *Квадратурная формула, левая одноточечная формула, правая одноточечная формула, точный интеграл, формула Тейлора, формула Маклорена.*

ON A COMPARATIVE ANALYSIS OF A TYPE OF "DIFFERENTIAL QUADRATURE" FORMULAS

Abstract. *This article provides a comparative analysis of some types of quadrature formulas used in the approximate calculation of definite integrals. The main goal of the study is to determine the relationship between the so-called “differential” quadrature formulas and approximate formulas created on the basis of Taylor-Maclaurin series. The authors cover from a theoretical and practical point of view the problem of approximate calculation of definite integrals, which is one of the important areas of computational mathematics, and also study the structure and mechanisms of formation of these formulas. This study serves to deepen the understanding of the algebraic properties of quadrature formulas.*

Keywords: *Quadrature formula, left one-point formula, right one-point formula, definite integral, Taylor formula, Maclaurin formula.*

Hisoblash matematikasi shunday sohaki, bunda asosan sonli metodlar, ya’ni masala yechimini sonli natijagacha keltirish usullari o‘ rganiladi. Bu jarayon faqatgina ilmiy jihatdangina emas, balki katta amaliy qiziqish ham uyg‘ otadiki, zero hisoblash – san’at hamdir.

Matematikada shunday xarakterdagi masalalar borki, masalan tub sonlarga doir mashxur muammolar. Shuningdek, yana, masalan tenglamalarni butun sonlarda yechish kabi masalalar uzoq vaqtlar davomida matematiklar dunyosida huddi sportga bo‘ lgan qiziqish singari “jo‘ shqin” qiziqish uyg‘ otib kelgan.

Xuddi shuningdek, hisoblash matematikasining “Aniq integrallarni taqribiy hisoblash” bo‘ limi borki, bu bo‘ lim kvadratura, kubatura, formulalarini o‘ rganish va qurish masalalari bilan shug‘ ullanadi. Bu mavzu, ya’ni aniq integrallar uchun taqribiy formulalar qurish jarayoni va uning metodik jihatlari, hech qanday mubolag‘ asiz aytish mumkinki, doimo ijodiy ilhom manbai bo‘ lib kelgan.

Aniq integrallar uchun qurilgan taqribiy formulalarning an’anaviy turlari bilan bir qatorda yana shunday formulalar borki bu formulalar integral ostidagi funksiya va uning hosilalarining faqatgina integrallash oralig‘ ining ikki chetki nuqtalaridagi qiymatlarinigina o‘ z ichiga olgan bo‘ lib, bu tur fo‘ rmulalar ham o‘ ziga xos jiddiy qiziqish uyg‘ otadi. [1-6]

Ma’lumki, an’anaviy kvadratura formulalarining qurilishi interpolyatsion ko‘ phadlarga asoslanishi, boshqa turdagi formulalar esa ketma-ket bo‘ laklab integrallash usuli yordamida hosil qilinishi ta’kidlangan. Shuningdek, ayrim formulalarda integral ostidagi funksiya va uning hosilalarining faqat integrallash oralig‘ ining chetki nuqtalaridagi qiymatlaridan foydalanilishi ko‘ rsatiladi. Bu esa tugun nuqtalarini tanlash zaruratini kamaytiradi va formulalarning amaliy qo‘ llanish imkoniyatlarini kengaytiradi.

Shuni qayd etish ketakki, [5] da qaralayotgan kvadratura formulasi integral osti funksiyasi f(x) mansub bo‘ lgan sohada eng yaxshi formula deb atalib, uni qurish usuli formula qoldiq hadini u o‘ z ichiga olgan noma’lum koeffitsiyentlarga nisbatan minimallashtirishga asoslangan.

Ammo, [4, 6] larda qaralgan kvadratura formulalarining qurilishi esa, ularning, darajasi 2n gacha bo‘ lgan ko‘ phadlarni aniq integrallash prinsipiga asoslangan bo‘ lib, bu formulalar eng yuqori algebraik daraja aniqligidagi kvadratura formulalari deb ataladi.

Maqolada, ba’zi bir kvadratura formulalari o‘ zaro formal tuzilishlarining o‘ xshashliklari o‘ rganiladi.

Ya’ni, “differensial” kvadratura formulalari deb ataluvchi formula bilan Teylor - Makloren formulalari yordamida qurilgan taqribiy formulalar orasidagi o‘ xshashlik ko‘ rsatiladi.

Yuqoridagi [4] dan ushbu

$$I = \int_0^1 f(x)dx, \tag{1}$$

integral uchun chap bir nuqtali formulani keltiramiz:

$$I_0 = \sum_{k=0}^{2n-1} A_{k,0} f^{(k)}(0), \tag{2}$$

bunda

$$A_{k,0} = (-1)^k \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(k-i+2)}.$$

(2) ni yoyib yozilsa:

$$I_0 = \frac{1}{1!} f(0) + \frac{1}{2!} f'(0) + \frac{1}{3!} f''(0) + \ldots + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n)}(0). \tag{3}$$

Endi (1) integral uchun integral ostidagi f (x) funksiya uning Makloren formulasi yoyilmasi bilan almashtirilib hosil qilingan formulani qaraylik:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^x,$$

$$I_0' = \int_0^1 \left(f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right) dx,$$

va bundan hosil qilamiz:

$$I_0' = \frac{f(0)}{1!} + \frac{f'(0)}{2!} + \frac{f''(0)}{3!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!}. \tag{4}$$

Ajablanarlisi shundaki, (3) va (4) formulalarning o‘ zaro ustma-ust tushishi, ya’ni ularning o‘ zaro aynan tengligi ko‘ rinib turibdi. Aslida (3) formula bo‘ laklab integrallash usuli bilan qurilgan [4]. Ammo (4) formula esa butunlay boshqa usul, ya’ni, ko‘ rganimizdek integral osti funksiyasini taqriban Makloren formulasi bilan almashtirish orqali hosil qilingan.

Endi esa (1) integral uchun o‘ ng bir nuqtali kvadratura formulasini keltiramiz [4]:

$$I_1 = \sum_{k=0}^{2n-1} B_{k,1} f^{(k)}(1),$$

bunda

$$B_{k,1} = \frac{(-1)^k \Gamma(1)}{\Gamma(k+2)}.$$

Bu formulaning yoyilgan ko‘ rinishi esa:

$$I_1^{'} = \frac{f(1)}{1!} - \frac{f^{'}(1)}{2!} + \frac{f^{''}(1)}{3!} - \frac{f^{''}(1)}{3!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(1)}{(n+1)!}. \quad (5)$$

Bu formulani huddi shu (1) integral uchun integral osti funksiyasi $f(x)$ ni $a = 1$ xol uchun Teylor formulasi bilan almashtirib, hosil qilingan taqribiy formulani keltiramiz:

$$f(x) \approx f(1) + \frac{f^{'}(1)}{1!}(x-1) + \frac{f^{''}(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n,$$

ya'ni

$I = \int_0^1 f(x)\,dx \approx \int_1^1 \left[f(1) + \frac{f^{'}(1)}{1!}(x-1) + \frac{f^{''}(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n\right]dx$, bundan

$$I_1^{'} = \frac{f(1)}{1!} - \frac{f^{'}(1)}{2!} + \frac{f^{''}(1)}{3!} - \frac{f^{'''}(1)}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{f^{(n)}(1)}{(n+1)!}(x-1)^n, \quad (6)$$

hosil bo' ladi.

Bu holda ham (5) va (6) kvadratura formulalarning o' zaro aynan teng ekanligi ko' rinib turibdi:

$$I_1 = I_1^{'}.$$

Aniq integrallarni taqribiy hisoblash formulalari, ya'ni ikki xil kvardatura formulalari, hosil qilinishlariga ko' ra o' zaro butunlay boshqa-boshqa usullar bilan qurilgan bo' lsada, ularning aynan bir xil ekanliklari albatta, ham nazariy va ham amaliy qiziqish uyg' otadi.

Maqolaning ilmiy yangiligi shundaki, bir-biridan mutlaqo farq qiluvchi matematik yondashuvlar yordamida hosil qilingan formulalarning o' zaro ekvivalentligi nazariy jihatdan asoslab berilgan. Olingan natijalar aniq integrallarni hisoblashning yangi usullarini ishlab chiqish, mavjud algoritmlarni takomillashtirish hamda hisoblash jarayonlarining samaradorligini oshirishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М. Физматгиз 1961.

2. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М. "Наука". 1967.

3. Никольский С. М. Квадратурные формулы. М. "Наука". 1974.

4. Джуракулов Р. О некоторых квадратурных формулах наивысшей алгебраической степени точности. "Вопросы вычеслительной и прикладной математики , вып. 42. Ташкент, 1976, 25 - 45.

5. Левин М. И. Об одной наилучшей формуле с весовой функцией. Ж. вычеслит. матем. и матем. физики, 1965, т. 5, Н3, 542 - 545.

6. Рамский Ю. С. Об одной формулу приближенного интегрирования функций, имеющих логарифмических особенность. Вычислительная и прикладная математика. Межведомственный научный сборник. Изд-е Киевского ун-та 1973, вып. 20, 113 - 118.

References

1. Lansosh K. Prakticheskie metody prikladnogo analiza.[Practical analysis of practical methods] M. Fizmatgiz 1961.

2. Krylov V. I. Priblijennoe vychislenie integralov.[Approximation of integrals] M. "Nauka". 1967.

3. Nikolskiy S. M. Kvadraturnye formuly.[Quadratic formula] M. "Nauka". 1974.

4. Djurakulov R. O nekotoryx kvadraturnyx formulax naivysshey algebraicheskoy stepeni tochnosti.[The accuracy of some quadratic formulas of naive algebraic degrees] "Voprosы vыcheslitelnoy i prikladnoy matematiki , vыp. 42. Tashkent, 1976, 25 - 45.

5. Levin M. I. Ob odnoy nailuchshey formule s vesovoy funksiey.[Ob odnoy nailuchshey formula with wide function] J. vыcheslit. matem. i matem. fiziki, 1965, t. 5, N3, 542 - 545.

6. Ramskiy Yu. S. Ob odnoy formulu priblijennogo integrirovaniya funksiy, imeyushix logarifmicheskix osobennost.[Ob odnoy formula priblijennogo integrirovaniya funktsi, imeyushchikh logarithmicheskikh osobennost.] Vychislitelnaya i prikladnaya matematika. Mejvedomstvennyy nauchnyy sbornik. Izd-ye Kievskogo un-ta 1973, vыp. 20, 113 - 118.