NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI, [2026-8]
ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427

01.00.00-FIZIKA-MATEMATIKA
journal.namdu.uz
PHYSICS AND MATHEMATICS

UDC 511.53 (517.98)

SOLVABILITY OF THE CUBIC EQUATION OVER THE FIELD OF THE P-ADIC NUMBERS

Zulxumor T. Abdukaxorova
Namangan state university
https://orcid.org/0009-0005-4166-4369
Scopus ID: 59126092800
Email: zulxumorabdukaxorova@gmail.com

Abstract. *This paper investigates the solvability conditions of the equation* $x^3 = a$ *over the field* $\mathbb{Q}_p$. *The cases* $p > 3$ *and* $p = 3$ *are studied separately. Using number theory, congruences, and Hensel's lemma, solvability criteria for the cubic equation are established. Furthermore, several particular examples are analyzed, and general results are presented.*

Keywords: p *-adic number,* p *-adic valuation, congruence, cubic residue, Hensel's lemma,* p *-adic integers,* p *-adic units, cubic equation.*

РАЗРЕШИМОСТЬ КУБИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПОЛЕ p -АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Аннотация. *В данной статье исследуются условия существования решений уравнения вида* $x^3 = a$ *в поле* $\mathbb{Q}_p$. *Рассматриваются случаи* $p > 3$ *и* $p = 3$. *С использованием теории чисел, конгруэнций и леммы Хенселя установлены критерии разрешимости кубического уравнения. Кроме того, проведён анализ некоторых частных примеров и получены общие результаты.*

Ключевые слова: p *-адическое число,* p *-адический порядок, сравнение, кубический остаток, лемма Хенселя,* p *-адические целые числа,* p *-адические единицы, кубическое уравнение.*

p -ADIK SONLAR MAYDONIDA $x^3 = a$ TENGLAMANING YECHIMGA EGA BO‘ LISH SHARTLARI

Annotatsiya. *Ushbu maqolada* $x^3 = a$ *ko‘ rinishidagi tenglamaning* $\mathbb{Q}_p$ *maydonda yechimga ega bo‘ lish shartlari o‘ rganildi. Tadqiqotda* $p > 3$ *va* $p = 3$ *hollari alohida ko‘ rib chiqildi. Sonlar nazariyasi, taqqoslamalar va Genzel lemmasi yordamida kubik tenglamaning yechiluvchanlik kriteriyalari aniqlandi. Shuningdek, ba'zi xususiy misollar tahlil qilinib, umumiy natijalar keltirildi.*

Kalit so‘ zlar: p *-adik son,* p *-adik tartib, taqqoslama, kubik qoldiq, Genzel lemmasi,* p *-adik butun sonlar,* p *-adik birliklar, kubik tenglama.*

Kirish

Sonlar nazariyasi matematikada eng qadimiy va fundamental yo‘ nalishlardan biri bo‘ lib, uning ko‘ plab natijalari va tatbiqlari algebra, analiz va matematik fizika bilan uzviy bog‘ liqdir. 1897-yilda nemis matematik olimi Kurt Genzel p -adik sonlar tushunchasini fanga kiritdi va bu nazariya keyinchalik algebraik sonlar nazariyasi hamda analizning muhim bo‘ limiga aylandi. Ayniqsa, p -adik sonlar nazariyasi XX asrning ikkinchi yarmidan boshlab keng tadqiq qilina boshladi va hozirgi kunda dinamik sistemalar, ehtimollar nazariyasi, kriptografiya hamda statistik fizika kabi sohalarda muhim amaliy tatbiqlarga ega bo‘ ldi.

$\mathbb{Q}_p$ p -adik sonlar maydonida algebraik tenglamalarning yechimga ega bo‘ lish masalasi nazariy va amaliy jihatdan katta ahamiyat kasb etadi, chunki bu natijalar ko‘ plab matematik modellarni chuqurroq tushunishga yordam beradi.

$x^3 = a$ ko‘ rinishidagi kubik tenglamalar eng sodda, ammo muhim algebraik tenglamalardan biri hisoblanadi. Ularning $\square_p$ p-adik sonlar maydonida yechimga ega bo‘ lish masalasi bir tomondan sonlar nazariyasi va taqqoslamalar bilan, ikkinchi tomondan esa Genzel lemmasi va sonning p-adik tartibi bilan bevosita bog‘ liqdir. Shu sababli, kubik tenglamaning yechiluvchanlik shartlarini aniqlash nafaqat nazariy qiziqish uyg‘ otadi, balki p-adik analiz, dinamik sistemalar va p-adik umumlashgan Gibbs o‘ lchovlari nazariyasi uchun ham amaliy ahamiyatga ega.

Ushbu maqolada $x^3 = a$ tenglamaning sonning maydondagi yechimga ega bo‘ lish shartlari o‘ rganiladi. Tadqiqotda $p > 3$ va $p = 3$ hollari alohida ko‘ rib chiqilib, sonning p-adik tartibi, taqqoslamalar va Genzel lemmasi yordamida tenglamaning yechimga ega bo‘ lish kriteriyalari aniqlanadi. Shuningdek, ba’zi xususiy misollar orqali umumiy natijalar yoritiladi. Maqolaning asosiy maqsadi — kubik tenglamaning $\square_p$ maydonda yechimga ega bo‘ lishi uchun zarur va yetarli shartlarni aniqlash hamda ularning matematik ahamiyatini ko‘ rsatishdir.

Adabiyotlar tahlili

So‘ nggi yillarda p-adik sonlar maydonida tenglamalarni yechish bo‘ yicha bir qator ilmiy ishlar chop etildi. [1] ishda mualliflar $x^k = a$ ko‘ rinishidagi monomial tenglamalarning $\square_p$ maydondagi yechimlarini tavsiflab, ularning perturbatsiyalarini ham o‘ rgangan. Shuningdek, [2] ishda esa mualliflar umumiy monomial tenglamalar uchun yechiluvchanlik kriteriyalarini ishlab chiqdilar. Ular $q = mp^s$ ko‘ rinishidagi hollarda aniq shartlarni berib, −1 sonining q-darajali ildiz bo‘ lishi masalasini ham tahlil qildilar. Bu natijalar Leybnitz algebralari va p-adik dinamik sistemalar bilan bog‘ liq tatbiqlarga ega.

Mazkur ishlarda umumiy monomial tenglamalar va ularning perturbatsiyalari keng o‘ rganilgan bo‘ lsa-da, kubik tenglamaning ($x^3 = a$) $\square_p$ maydondagi yechimga ega bo‘ lish shartlari alohida va to‘ liq ko‘ rib chiqilmagan. Shu sababli, ushbu maqola mavjud adabiyotlarni to‘ ldiradi va kubik tenglamaning yechimga ega bo‘ lishi uchun zarur va yetarli shartlarni aniq shaklda beradi. Bundan tashqari, a parametrning ba’zi xususiy qiymatlarida kubik tenglama yechimlari ham topilgan.

Tadqiqot metodologiyasi

Mazkur tadqiqot ishida $x^3 = a$ ko‘ rinishidagi tenglamaning $\square_p$ p-adik sonlar maydonida yechimga ega bo‘ lishi uchun va yetarli shartlarni zarurda algebrik va p-adik tahlilning bir nechta klassik va umumlashtirilgan usullaridan foydalanildi. Bularga misol qilib keltirish mumkin:

Sonning p-adik tartibi — p-adik tartib va normaning xossalari yordamida tenglamaning ildizlari mavjudligi uchun zarur shartlar belgilandi.

Taqqoslamalar — p modul bo‘ yicha taqqoslamalar arifmetikasi asosida kubik qoldiqlar va ularning kubik qoldiq bo‘ lishi tahlil qilindi.

Ferma teoremasi — $p-1$ darajali guruh tuzilmasi orqali kubik qoldiqlarni tasniflashda qo‘ llanildi.

Klassik va umumlashgan Genzel lemmalari — p>3 bo‘ lganda klassik Genzel lemmasidan hamda p=3 bo‘ lganda esa umumlashgan Genzel lemmasidan taqqoslamalar darajasida topilgan yechimlarni $\square_p$ butun sonlar halqasiga ko‘ tarish uchun ishlatildi.

Tadqiqot ishida $p > 3$ va $p = 3$ hollari alohida ko‘ rib chiqildi. Har bir holatda yechiluvchanlik kriteriyalari aniqlandi va misollar yordamida tasdiqlandi. Shuningdek, metodologiya doirasida ba’zi xususiy tenglamalar tahlil qilinib, umumiy natijalar bilan solishtirildi.

Natijalar va ularning tahlili

Dastlabki tushunchalar. Faraz qilaylik, p tub son bo‘ lsin. Ixtiyoriy $a \in \not\in \setminus \{0\}$ son uchun shu sonning p tub son bo‘ yicha tartibi tushunchasini kiritaylik. Agar

$$a \equiv 0 \pmod{p^k}, \quad a \not\equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$$

bo‘ lsa, u holda k butun songa a sonining p-adik tartibi deyiladi va $ord_p(a) = k$ kabi belgilanadi. Agar $a = 0$ bo‘ lsa u holda $ord_p(0) = +\infty$ deb olinadi. ¤ ratsional sonlar maydonining p-adik tartib yordamida aniqlangan $|\cdot|_p$ p-adik (noarximed) norma bo‘ yicha to‘ ldirmasi p-adik sonlar maydoni deyiladi va ¤ $_p$ kabi ifodalanadi.

$EKUB(m,p)=EKUB(n,p)=1$ bo‘ lgan ixtiyoriy noldan farqli $x=p^k\frac{m}{n}$ ratsional sonining p-adik tartibi $ord_p(x)=k$ ko‘ rinishida aniqlanadi va unga mos keluvchi p-adik norma $|x|_p=p^{-ord_p(x)}$ tenglik bilan aniqlanadi.

p-adik butun sonlar halqasi

$$\mathbb{Z}_p=\{x\in\mathbb{Q}_p: ord_p(x)\geq 0\}$$

orqali belgilanadi. Bu halqa yagona $p\mathbb{Z}_p$ maksimal idealiga va

$$\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p\cong \mathrm{F}_p$$

p modul bo‘ yicha qoldiqlar sinfiga ega bo‘ lgan lokal halqadir. p-adik birlar

$$\mathbb{Z}_p^{\times}=\{x\in\mathbb{Q}_p: ord_p(x)=0\}.$$

Ixtiyoriy noldan farqli $a\in\mathbb{Q}_p$ element

$$a=p^{ord_p(a)}u$$

ko‘ rinishidagi yagona kanonik yoyilmaga ega, bu yerda $u\in\mathbb{Z}_p^{\times}$.

$\mathbb{Q}_p$ maydon ustidagi ko‘ phadlarning ildizlari mavjud bo‘ lishining yetarliligini kafotlaydigan lemma bu Genzel lemmasidir. Quyida ushbu lemmaning umumlashgan ifodasini keltiramiz.

1-Lemma (Umumlashgan Genzel lemmasi) [3,4, 6-8]. $F(x)\in\mathbb{Z}_p[x]$ *ko‘ phad va* $F'(x)$ *uning hosilasi bo‘ lsin. Faraz qilaylik, biror* $\alpha_0\in\mathbb{Z}_p$ *elementi va* $k\in\mathbb{N}$ *soni uchun quyidagi shartlar bajarilsin:*

1. $F'(\alpha_0)\equiv 0 \pmod{p^k}$ *va* $F'(\alpha_0)\not\equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$;
2. $F(\alpha_0)\equiv 0 \pmod{p^{2k+1}}$.

U holda, $F(x)$ *ko‘ phadining* $\mathbb{Z}_p$ *da* $F(\alpha)=0$ *shartini qanoatlantiruvchi yagona* α *ildizi mavjud bo‘ lib, u uchun* $\alpha\equiv\alpha_0 \pmod{p^{k+1}}$ *taqqoslama o‘ rinli bo‘ ladi.*

Genzel lemmasini klassik variantida yuqoridagi ikki shart quyidagi shartlarga almashadi: $F(\alpha_0)\equiv 0 \pmod{p}$ va $F'(\alpha_0)\not\equiv 0 \pmod{p}$. Bu holda tenglama $\alpha\equiv\alpha_0 \pmod{p}$ ko‘ rinishidagi yagona yechimga ega bo‘ ladi [3,4,5].

Quyidagi teorema bizga sonlar nazariyasidan ma’lum:

1-Teorema. [3, 5-8] Faraz qilaylik p tub son, k natural son va $EKUB(a,p)=1$ shartni qanoatlantiruvchi $a\in\mathbb{Z}$ berilgan bo‘ lsin. U holda $x^k\equiv a \pmod{p}$ taqqoslama yechimga ega bo‘ lishi uchun $a^{\frac{p-1}{EKUB(k,p-1)}}\equiv 1 \pmod{p}$ o‘ rinli bo‘ lishi zarur va yetarli. Bundan tashqari, agar taqqoslama yechimga ega bo‘ lsa, u holda uning p modul bo‘ yicha o‘ zaro taqqoslanmaydigan yechimlari soni $EKUB(k,p-1)$ ga teng bo‘ ladi.

Quyida biz kubik tenglamaning yechiluvchanlik shartlarini aniqlaymiz.

$x^3=a$ ***kubik tenglamaning yechiluvchanlik shartlari***

Biz ushbu maqolada

$$x^3=a,\quad a\in\mathbb{Q}_p. \tag{1}$$

ko‘ rinishdagi kubik tenglamani ko‘ rib chiqamiz hamda (1) ko‘ rinishdagi tenglamaning yechimlari qaysi tub sonlarda $\mathbb{Q}_p$ maydonlarda mavjud, tenglama yechimlari soni nechta degan savollarga javob izlaymiz.

2-Teorema. *Aytaylik* $a=p^{ord_p(a)}u$ $(u\in\mathbb{Z}_p^{\times})$ *bo‘ lsin. (1) tenglama* $\mathbb{Q}_p$ *da yechimga ega bo‘ lishi uchun quyidagi ikki shartning bir vaqtda bajarilishi zarur va yetarli:*

1. $ord_p(a)\equiv 0 \pmod{3}$,

2. $y^3 = u$ *tenglama* $\mathbb{Q}_p^{\times}$ *da yechimga ega.*

Isboti. Zaruriyligi. Faraz qilaylik, (1) tenglama $\mathbb{Z}_p$ da yechimga bo‘ lsin. U holda tenglikning ikkala tomonidagi sonlarning p -adik tartibini topsak, biz quyidagiga ega bo‘ lamiz:

$$ord_p(x^3) = ord_p(a).$$

p -adik tartibning xossasiga ko‘ ra

$$3ord_p(x) = ord_p(a).$$

Har qanday sonning p -adik tartibi butun son ya’ni, $ord_p(x) \in \mathbb{Q}$ bo‘ lganligi sababli, $ord_p(a)$ qiymat 3 ga karrali ekanligi kelib chiqadi, ya’ni $ord_p(a) \equiv 0 \pmod 3$. Bu esa biror $m \in \mathbb{Q}$ uchun $ord_p(a) = 3m$ ekanligini bildiradi. Agar x elementni $x = p^m y$ ($y \in \mathbb{Q}_p^{\times}$) ko‘ rinishida ifodalab, (1) tenglamaga qo‘ ysak,

$$(p^m y)^3 = p^{3m} u \Rightarrow p^{3m} y^3 = p^{3m} u$$

tenglikka ega bo‘ lamiz. Oxirgi tenglikdan esa $y^3 = u$ hosil bo‘ ladi va bu p -adik birlar to‘ plamida yechimga ega ekanligini isbotlaydi.

Yetarliligi. Faraz qilaylik biror $m \in \mathbb{Q}$ uchun $ord_p(a) = 3m$ bo‘ lsin va $y \in \mathbb{Q}_p^{\times}$ element $y^3 = u$ tenglikni qanoatlantirsin. Biz (1) ning yechimi $x = p^m y \in \mathbb{Z}_p$ kabi bo‘ lishini ko‘ rsataylik. Bu yechimni (1) tenglamaga qo‘ yib quyidagiga ega bo‘ lamiz:

$$x^3 = a \Rightarrow p^{3m} y^3 = p^{3m} u \Rightarrow y^3 = u.$$

Bu esa x ning izlanayotgan yechim ekanligini tasdiqlaydi. Teorema isbotlandi.

$p > 3$ ***hol.*** Endi biz $p > 3$ bo‘ lganda

$$y^3 = u \tag{2}$$

tenglama $\mathbb{Q}_p^{\times}$ da yechiluvchanlik shartlarni aniqlaymiz.

3-Teorema. $p > 3$ *tub son va* $u \in \mathbb{Q}_p^{\times}$ *bo‘ lsin. U holda* (2) *tenglama* $\mathbb{Q}_p^{\times}$ *da yechimga ega bo‘ lishi uchun* u ning p *modul bo‘ yicha kubik qoldiq bo‘ lishi zarur va yetarli. Bundan tashqari,*

1.*Agar* $p \equiv 2 \pmod 3$ *bo‘ lsa, ixtiyoriy* $u \in \mathbb{Q}_p^{\times}$ *uchun yagona yechim mavjud.*

2.*Agar* $p \equiv 1 \pmod 3$ *bo‘ lsa, yechim mavjud bo‘ lishi uchun* $u^{(p-1)/3} \equiv 1 \pmod p$ *shartining bajarilishi zarur va yetarli. Bu holda* (2) *tenglama* $\mathbb{Q}_p^{\times}$ *da uchta turli yechimlarga ega*

Isboti. Zaruriyligi. Faraz qilaylikk, $y^3 = u$ tenglama $\mathbb{Q}_p^{\times}$ da biror yechimga ega bo‘ lsin. $y \in \mathbb{Q}_p^{\times}$ ekanligidan yechimning p modul bo‘ yicha tartibi nolga teng, ya’ ni $y \not\equiv 0 \pmod p$. Bundan $y^3 \equiv u \pmod p$ taqqoslamaga ega bo‘ lamiz. Bu esa, o‘ z navbatida, u elementning p modul bo‘ yicha kubik qoldiq ekanligini anglatadi.

Yetarliligi. Faraz qilaylik $u \in \mathbb{Q}_p^{\times}$ *elementi* p *modul bo‘yicha kubik qoldiq bo‘lsin. Kubik qoldiq ta’rifiga ko‘ra, qoldiqlar sinfida shunday bir* $a \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ *element mavjudki, uning uchun*

$$a^3 \equiv u \pmod p \tag{3}$$

taqqoslama o‘ rinli. Endi $f(x) = x^3 - u$ yordamchi funksiyani qaraylik. Funksiyaning a nuqtadagi qiymatini hisoblab, hamda (3) foydalanib quyidagini yozishimiz mumkin:

$$f(a) = a^3 - u \equiv 0 \pmod p \tag{4}$$

Ushbu funksiyaning hosilasi $f'(x) = 3x^2$ ekanligini oson aniqlash mumkin. Teorema shartida $p > 3$ ekanligini hisobga olib va $a \not\equiv 0 \pmod p$ ekanligidan foydalanib,

$$f'(a) = 3a^2 \not\equiv 0 \pmod p \tag{5}$$

xulosaga kelamiz. (4) va (5) taqqoslamalar Genzel lemmasining barcha shartlarini to‘ liq qanoatlantiradi. Shuning uchun $f(x)$ ko‘ phadining $\mathbb{Z}_p$ da $f(y)=0$ shartini qanoatlantiruvchi yagona y ildizi mavjud bo‘ lib, u uchun $y \equiv a \pmod p$ taqqoslama o‘ rinli bo‘ ladi. Ushbu yechim $y \equiv a \not\equiv 0 \pmod p$ bo‘ lganligi sababli, izlanayotgan yechim $\mathbb{Z}_p^{\times}$ ga tegishli bo‘ ladi. Teoremaning asosiy qismi isbotlandi. Endi qo‘ shimcha qismini isbotlaylik.

1-hol: $p \equiv 2 \pmod 3$ bo‘ lsin. Bu holda $p-1$ soni 3 ga bo‘ linmaydi, ya’ni $EKUB(3, p-1)=1$ bo‘ ladi. 1-Teoremaga ko‘ ra, $x^3 \equiv a \pmod p$ taqqoslama doimo yagona $x_0 \pmod p$ yechimga ega. Genzel lemmasiga ko‘ ra, $\mathbb{Z}_p^{\times}$ da yagona $x \equiv x_0 \pmod p$ ko‘ rinishdagi yechim mavjud.

2-hol: $p \equiv 1 \pmod 3$ bo‘ lsin. U holda $EKUB(3, p-1)=3$ bo‘ ladi.

Zaruriyligi: faraz qilaylik (2) taqqoslama yechimga ega bo‘ lsin, ya’ni shunday $y \in \mathbb{Z}_p^{\times}$ mavjudki,

$$y^3 \equiv u \pmod p \tag{6}$$

taqqoslama o‘ rinli bo‘ ladi. Fermaning kichik teoremasiga ko‘ ra quyidagini yoza olamiz:

$$y^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Endi oxirgi taqqoslamadan foydalanib quyidagini yoza olamiz:

$$u^{\frac{p-1}{3}} \equiv \left(y^3\right)^{\frac{p-1}{3}} = y^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Bundan esa

$$a^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod p \tag{7}$$

kelib chiqdi. Demak, agar (2) tenglamaning yechimi mavjud bo‘ lsa, u holda (7) ning bajarilishi zarur ekan.

Yetarlilik: Faraz qilaylik (7) shart bajarilsin. $EKUB(p-1,3)=3$ ekanligi ravshan. Shuning uchun 1-Teoremaga ko‘ ra $x^3 \equiv u \pmod p$ tenglama $\{1,2,...,p-1\}=F_p^*$ da o‘ zaro taqqoslanmaydigan roppa-rosa 3 ta har xil $x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}$ ildizlarga ega bo‘ ladi. Ularning har biri uchun $f'(x_{0,i})=3x_{0,i}^2 \not\equiv 0 \pmod p$ sharti bajarilgani sababli, Genzel lemmasiga ko‘ ra ularning har biriga mos ravishda $\mathbb{Z}_p^*$ da yagona va o‘ zaro teng bo‘ lmagan 3 ta x_1, x_2, x_3 yechimlar mos keladi. Bu esa teorema isbotining yakunlanganligini bildiradi.

$p=3$ hol. $p=3$ bo‘ lgan hol $p>3$ holatidan tubdan farq qiladi. Chunki bu holda funksiyaning hosilasi $f'(x)=3x^2$ bo‘ lib, uning 3-adik normasi $|f'(x)|_3 = |3|_3 \cdot |x^2|_3 = \frac{1}{3}$ ga teng (agar $x \in \mathbb{Z}_3^{\times}$ bo‘ lsa) ya’ ni, hosila 3 modul bo‘ yicha doimo nolga teng: $f'(x_0) \equiv 0 \pmod 3$. Shu sababli klassik Genzel lemmasidan foydalana olmaganligimiz uchun umumlashgan Genzel lemmasidan foydalanib natijalarni isbotlaymiz.

4-Teorema. *Aytaylik, $u \in \mathbb{Z}_3^{\times}$ bo‘ lsin. $y^3=u$ tenglama $\mathbb{Z}_3^{\times}$ da yechimga ega bo‘ lishi uchun $u \equiv \pm 1 \pmod 9$ shartining bajarilishi zarur va yetarli. Agar bu shart bajarilsa, tenglama $\mathbb{Z}_3^{\times}$ da yagona yechimga ega bo‘ ladi.*

Isbot. Zaruriyligi. Faraz qilaylik, $y^3=u$ tenglama $\mathbb{Z}_3^{\times}$ da biror y yechimga ega bo‘ lsin. $y \in \mathbb{Z}_3^{\times}$ bo‘ lgani uchun $y \equiv 1 \pmod 3$ yoki $y \equiv 2 \equiv -1 \pmod 3$ bo‘ lishi mumkin. Ya’ni, $y \equiv \pm 1 \pmod 3$. Endi y ni $y = \pm 1 + 3\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{Z}_3$) ko‘ rinishida yozib, kubga ko‘ taramiz:

$$y^3 = (\pm 1 + 3\alpha)^3 = (\pm 1)^3 + 3\cdot(\pm 1)^2 \cdot (3\alpha) + 3\cdot(\pm 1)\cdot(3\alpha)^2 + (3\alpha)^3$$

$$y^3 = \pm 1 + 9\alpha \pm 27\alpha^2 + 27\alpha^3$$

Oxirgi tengliklardan ko‘ rinib turibdiki, $9\alpha \pm 27\alpha^2 + 27\alpha^3 \equiv 0 \pmod 9$ bo‘ ladi. Demak, $u = y^3 \equiv \pm 1 \pmod 9$.

Yetarliligi. Faraz qilaylik, $u \equiv \pm 1 \pmod 9$ bo‘ lsin. U holda shunday $k \in \not{c}_3$ topiladiki, u sonini $u = \pm 1 + 9k$ ko‘ rinishda yozish mumkin. Biz $f(x) = x^3 - u$ funksiyaning $\not{c}_3^{\times}$ dagi ildizini topishimiz kerak. Buning uchun yechim sifatida $x_0 = \pm 1$ nuqtani olaylik. Funksiya va uning hosilasini bu nuqtada qiymatini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} &f(x_0) = (\pm 1)^3 - (\pm 1 + 9k) = \pm 1 - \pm 1 - 9k = -9k \Rightarrow f(x_0) \equiv 0 \pmod 9, \\ &f'(x_0) = 3(\pm 1)^2 = 3 \Rightarrow f'(x_0) \equiv 0 \pmod 3. \end{aligned} \tag{8}$$

(8) tenglik bu funksiya uchun Genzel lemmasining klassik variantining shartlari bajarilmayotganini, shu sababli 1-Lemmadan foydalanishimiz kerakligni ko‘ rsatib turibdi. Endi yechimni $x_1 = x_0 + 3\alpha$ ko‘ rinishida olib, bu nuqtadagi funksiya qiymatini topaylik:

$$f(x_0 + 3\alpha) = (x_0^3 - u) + 9x_0^2\alpha + 27x_0\alpha^2 + 27\alpha^3$$

Avvalgi hisob-kitobimizdan $x_0^3 - u = -9k$ ekanligini bilamiz. Shunday qilib,

$$f(x_0 + 3\alpha) = 9(x_0^2\alpha - k) + 27x_0\alpha^2 + 27\alpha^3$$

Bizga $f(x_1) \equiv 0 \pmod{27}$ shartini ta’ minlaydigan α kerak. Shuning uchun

$$f(x_0 + 3\alpha) \equiv 9(x_0^2\alpha - k) \pmod{27}$$

Oxirgi taqqoslamadan agar biz $\alpha \equiv k \pmod 3$ deb tanlasak (ya’ ni $\alpha = k + 3\beta$), u holda $x_0^2 \equiv 1 \pmod 3$ ekanligini hisobga olsak ($x_0 = \pm 1$ bo‘ lgani uchun $x_0^2 = 1$):

$$x_0^2\alpha - k \equiv 1 \cdot k - k \equiv 0 \pmod 3$$

kelib chiqadi. Bu esa $9(x_0^2\alpha - k)$ ning 27 ga bo‘ linishini kafolatlaydi. Natijada

$$f(x_1) = f(x_0 + 3\alpha) \equiv 0 \pmod{27} \tag{9}$$

ga ega bo‘ lamiz. Endi funksiya hosilasining x_1 dagi qiymati uchun qiyudagiga ega bo‘ lamiz:

$$\begin{aligned} &f'(x_1) = 3(x_0 + 3\alpha)^2 = 3 \pm 18\alpha + 27\alpha^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(x_1) \equiv 0 \pmod 3 \text{ va } f'(x_1) \not\equiv 0 \pmod 9. \end{aligned} \tag{10}$$

(9) va (10) taqqoslamalar bizga 1-Lemma shartlari to‘ liq o‘ rinli ekanligini ko‘ rsatib turibdi. 1-Lemmaga (umumlashgan Genzel lemmasiga) ko‘ ra, $f(x) = 0$ tenglama $\not{c}_3^{\times}$ da yagona yechimga ega. Demak, agar $u \equiv \pm 1 \pmod 9$ bo‘ lsa, $y^3 = u$ tenglama $\not{c}_3^{\times}$ da yagona yechimga ega. Teorema to‘ liq isbotlandi.

Endi biz $a = \pm 1$ va $a = \pm 2$ bo‘ lganda $x^3 = a$ tenglamaning yechimlarini topish bilan shig‘ ullanaylik.

$x^3 = 1$. Bu tenglama p-adik tahlilda juda klassik hol hisoblanib, yuqorida olingan teoremalardan foydalanib quyidagi natijalarni keltiramiz:

- $p = 3$ bo‘ lganda: $1 \equiv 1 \pmod 9$ sharti bajariladi (4-Teorema). Demak, $\not{c}_3^{\times}$ da yagona yechim bor, u ham bo‘ lsa $x = 1$.
- $p \equiv 2 \pmod 3$ bo‘ lganda 3-Teoremaga ko‘ ra $x = 1$ ko‘ rinishida yagona yechim mavjud.
- $p \equiv 1 \pmod 3$ bo‘ lsin. Bu holda $1^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod p$ shart doimo bajariladi. Demak, tenglama roppa-rosa 3 ta har xil yechimga ega.

Misol uchun, $p = 7$ da $x^3 \equiv 1 \pmod 7$ taqqoslamaning yechimlari $x_0 \equiv 1, 2, 4 \pmod 7$ bo‘ ladi. ($2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$, $4^3 = 64 \equiv 1 \pmod 7$). Genzel lemmasiga ko‘ ra, $\not{c}_7^{\times}$ da 3 ta yechim bor: ulardan biri $x_1 = 1$, qolgan ikkitasi esa notrivial kubik ildizlardir: $x_2 \equiv 2 \pmod 7$, $x_3 \equiv 4 \pmod 7$

$x^3 = -1$. Bu tenglama uchun quyidagi natijalar olindi:

- $p = 3$ bo‘ lganda: $-1 \equiv -1 \pmod 9$ sharti bajariladi. Tenglama $\not{c}_3^{\times}$ da yagona yechimga ega: $x = -1$.

- $p \equiv 2 \pmod 3$ bo‘ lganda yagona yechim mavjud va u $x = -1$ ga teng.
- $p \equiv 1 \pmod 3$ bo‘ lganda $\frac{p-1}{3}$ juft son bo‘ ladi. Shuning uchun $(-1)^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod p$ shart o‘ rinli.

Demak, bu holda ham roppa-rosa 3 ta yechim mavjud (biri $x = -1$, qolgan ikkitasi notrivial).

$x^3=2$. Bu holda yechiluvchanlik tub songa jiddiy bog‘ liq bo‘ ladi (maqolada $p \geq 3$ bo‘ lgan hol qaralmoqda):

- $p = 3$ bo‘ lsin. $¢_3$ dagi ixtiyoriy yechimning kubi 9 modul bo‘ yicha 1 yoki -1 bo‘ lishi mumkin. $2 \not\equiv \pm 1 \pmod 9$ bo‘ lganligi uchun haqiqatdan ham tenglama yechimga ega emas.
- $p \equiv 2 \pmod 3$ bo‘ lsin. Bu holda 2 soni doimo kubik chegirma bo‘ ladi va tenglama yagona yechimga ega. *Masalan,* $p = 5$ *da:* $x^3 \equiv 2 \pmod 5 \Rightarrow x_0 = 3$ ($3^3 = 27 \equiv 2$). Genzel lemmasiga ko‘ ra $¢_5$ da yagona yechim bor.
- $p \equiv 1 \pmod 3$ bo‘ lsin. Yechim borligi uchun $2^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod p$ sharti bajarilishi kerak. Agar bajarilsa 3 ta yechim bor, bajarilmasa yechim yo‘ q. *Masalan,* $p = 7$ *da:* $2^{\frac{7-1}{3}} = 2^2 = 4 \not\equiv 1 \pmod 7$. Demak, ¤ $_7$ da yechim yo‘ q. $p = 31$ *da:* $2^{\frac{31-1}{3}} = 2^{10} = 1024 \equiv 1 \pmod{31}$. Demak, ¤ $_{31}$ da roppa-rosa 3 ta yechim bor.

$x^3=-2$. Bu hol uchun ham quyidagi natijalarni keltiramiz:

- $p = 3$ bo‘ lsin. $-2 \equiv 7 \pmod 9$ bo‘ lib, $\pm 1 \pmod 9$ shartiga tushmaydi $\Rightarrow$ yechim yoq.
- $p \equiv 2 \pmod 3$ bo‘ lsin. Doimo yagona yechim mavjud. *Masalan,* $p = 5$ deb olsak u holda $x^3 \equiv -2 \equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow x_0 = 2$ ($2^3 = 8 \equiv 3$). $¢_5$ da yagona yechim bor.
- $p \equiv 1 \pmod 3$ bo‘ lsin. $(-2)^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod p$ sharti tekshiriladi. $\frac{p-1}{3}$ juft bo‘ lgani uchun bu shart $2^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod p$ sharti bilan ustma ust tushadi.

Ya’ni, $a = 2$ yechim bo‘ lsa, $a = -2$ ham yechim bo‘ ladi (3 ta yechim), aks holda yechim yo‘ q. (Masalan, $p = 7$ da yo‘ q, $p = 31$ da 3 ta yechim bor).

Xulosa

Ushbu maqolada $p > 3$ bo‘ lganda $\square_p$ p-adik sonlar maydonida $x^3 = a$ ko‘ rinishidagi tenglamaning yechiluvchanlik shartlari va yechimlari soni to‘ liq tahlil qilindi.

Avvalo, tenglama yechimga ega bo‘ lishi uchun $ord_p(a) \equiv 0 \pmod 3$ bo‘ lishi zarur ekanligi ko‘ rsatildi va masala $\square_p^{\times}$ dagi $y^3 = u$ ga keltirildi. Shundan so‘ ng, $p \equiv 2 \pmod 3$ bo‘ lganda tenglama $\square_p^{\times}$ da har doim bitta yechimga ega ekani, $p \equiv 1 \pmod 3$ bo‘ lganiga esa yechimlar soni roppa-rosa 3 ta bo‘ lishi isbotlandi.

Bundan tashqari, $p = 3$ holatida klassik Gensel lemmasi ishlamasligi ko‘ rsatilib, umumlashgan Gensel lemmasi asosida $u \equiv \pm 1 \pmod 9$ zaruriy va yetarlilik sharti olindi hamda yechimning yagonaligi kafolatlandi. Olingan nazariy natijalar asosida $x^3 = \pm 1$ va $x^3 = \pm 2$ tenglamalar yechib ko‘ rsatildi.

Olingan natijalar *p*-adik dinamik sistemalarni tahlil qilishda, Keli daraxtida *p*-adik Gibbs o‘ lchovlarini qurishda va yuqori darajali $x^n = a$ tenglamalarning umumiy nazariyasini rivojlantirishda amaliy ahamiyatga ega.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Mukhamedov F. M., Khakimov O. N., *p*-adic monomial equations and their perturbations // Izvestiya: Mathematics, 2020, 84-jild, 2-son, 348–360-betlar.

2. Mukhamedov F.M, Saburov M., On equation $x^q = a$ over $\mathbb{Q}_p$ // Journal of Number Theory, 2013, 133-jild, 1-son, 55-58-betlar.

3. Koblitz N. . *p*-adic numbers, *p*-adic analysis and zeta-functions. // Springer, New York, 1977.

4. Vladimorov V.S., Volovich I.V. and Zelenov E.I. *p*-adic analysis and mathematical physics. // World Sci. Publ., Singapore, 1994.

5. Rosen K.H. Elementary number theory and its applications. // Addison-Westley, Reading, Mass.,1986.

6. Robert A.M. *A Course in p-adic Analysis.* // Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2000, 198-jild.

7. Gouvêa F.Q. *p-adik sonlar: Kirish*. // Springer, Berlin, 2020.

8. Zúñiga-Galindo W.A. *p-adik analiz: Stoxastik jarayonlar va psevdodifferensial tenglamalar*. // Walter de Gruyter, Berlin, 2024.

References

1. Mukhamedov F.M., Khakimov O. N. *p*-adic monomial equations and their perturbations. Izvestiya: Mathematics, 2020, vol. 84, no. 2, pp. 348–360.

2. Mukhamedov F., Saburov M. On equation $x^q = a$ over $\mathbb{Q}_p$. Journal of Number Theory, 2013, vol. 133, no. 1, pp. 55–58.

3. Koblitz N. *p*-adic Numbers, *p*-adic Analysis, and Zeta-Functions. 2nd ed. New York, Springer-Verlag, 1984. 150 p.

4. Vladimirov V. S., Volovich I. V., Zelenov E. I. *p*-adic Analysis and Mathematical Physics. Singapore, World Scientific, 1994. 378 p.

5. Rosen K. H. Elementary Number Theory and Its Applications. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1986. 480 p.

6. Robert A.M. *A Course in p-adic Analysis.* // Graduate Texts in Mathematics, Vol. 198. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

7. Gouvêa F.Q. p-adic Numbers: An Introduction. // Springer, Berlin, 2020.

8. Zúñiga-Galindo W.A. p-Adic Analysis: Stochastic Processes and Pseudo-Differential Equations. // Walter de Gruyter, Berlin, 2024.