

NAMANGAN DAVLAT
UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI, [2026-9]
ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427



01.00.00-FIZIKA-MATEMATIKA
journal.namdu.uz
PHYSICS AND MATHEMATICS

УДК 517.956.6

IKKITA BESSEL OPERATORI VA IKKITA TIP O' ZGARISH TEKISLIGIGA EGA UCH O' LCHOVLI ARALASH TIPDAGI TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALA

Karimov Kamoliddin To' ychiboyevich

Farg' ona davlat universiteti professori,

O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institute katta ilmiy xodimi

ORCID: 0000-0002-9098-4116

E-mail: karimovk80@mail.ru

Olimova Dilfuza Sobirjonovna

O'zbekiston Respublikasi Mudofaa vazirligi Farg' ona "Temurbeklar maktabi" harbiy-akademik litseyi o' qituvchisi

ORCID: 0009-0006-3624-3065

E-mail: dilfuzaolimova406@gmail.com

Annotatsiya: Maqolada ikkita Bessel operatori va ikkita tip o' zgarish tekisligiga ega uch o' lchovli aralash tipdagi tenglama uchun x o' zgaruvchi bo' yicha ikkinchi chegaraviy shart (Neyman sharti) berilgan chegaraviy masala tadqiq etilgan. O' zgaruvchilarni ajratish usuli yordamida dastlabki chegaraviy masala bir nechta yordamchi spektral masalalarga keltiriladi. Tegishli xos qiymatlar masalalari tadqiq etilib, ular bilan bog' liq xos funksiyalar sistemalari quriladi. Yechimlarning aniq ifodalarini olish uchun biortogonal xos funksiyalar sistemasi bilan birgalikda vazni Fure-Bessel yoyilmasidan foydalaniladi. Spektral parametrlar orasidagi turli nisbatlarga mos keluvchi hollar alohida tahlil qilinadi. Bunda parametrlarning ayrim oraliqlarida yuzaga keladigan «kichik maxrajlar» muammosiga alohida e'tibor qaratiladi. Bu esa qurilgan qatorlarning yaqinlashishini asoslash uchun maxsus analitik usullarni qo' llashni talab etadi. Tegishli chegaraviy shartlar va tutashtirish shartlari ostida yechimning mavjudligi va yagonaligi o' rnatiladi.

Kalit so' zlar: aralash tipdagi tenglama; ikkinchi chegaraviy masala; Bessel operatori; Neyman sharti; xos funksiyalar sistemasi; Fure-Bessel yoyilmasi; biortogonal sistema; kichik maxrajlar muammosi.

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЁХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ОПЕРАТОРАМИ БЕССЕЛЯ И ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ СМЕНЫ ТИПА

Аннотация: В статье исследуется краевая задача со вторым граничным условием (условием Неймана) по переменной x для трёхмерного уравнения смешанного типа с двумя операторами Бесселя и двумя плоскостями изменения типа. С помощью метода разделения переменных исходная краевая задача сводится к нескольким вспомогательным спектральным задачам. Исследуются соответствующие задачи на собственные значения и строятся связанные с ними системы собственных функций. Для получения явных представлений решений применяется взвешенное разложение Фурье-Бесселя совместно с биортогональной системой собственных функций. Отдельно анализируются случаи, соответствующие различным соотношениям между спектральными параметрами. При этом особое внимание уделяется проблеме «малых знаменателей», возникающей в некоторых диапазонах параметров, что требует применения специальных аналитических приёмов для обоснования сходимости построенных рядов. При соответствующих краевых условиях и условиях сопряжения устанавливаются существование и единственность решения.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа; вторая краевая задача; оператор Бесселя; условие Неймана; система собственных функций; разложение Фурье-Бесселя; биортогональная система; проблема малых знаменателей.

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A THREE-DIMENSIONAL MIXED-TYPE EQUATION WITH TWO BESSEL OPERATORS AND TWO TYPE-CHANGING PLANES

Abstract: This paper investigates a boundary value problem with the second boundary condition (Neumann condition) with respect to the variable x for a three-dimensional mixed-type equation with two Bessel operators and two type-changing planes. By means of the method of separation of variables, the original boundary value problem is reduced to several auxiliary spectral problems. The corresponding eigenvalue problems are investigated, and the associated systems of eigenfunctions are constructed. To obtain explicit

representations of the solutions, a weighted Fourier–Bessel expansion is employed in conjunction with a biorthogonal system of eigenfunctions. The cases corresponding to different relations between the spectral parameters are analyzed separately. Particular attention is paid to the small-denominator problem arising in certain parameter ranges, which requires special analytical techniques to justify the convergence of the constructed series. Under the corresponding boundary and conjugation conditions, the existence and uniqueness of the solution are established.

Keywords: mixed-type equation; second boundary value problem; Bessel operator; Neumann condition; system of eigenfunctions; Fourier–Bessel expansion; biorthogonal system; small-denominator problem.

1. Введение

Краевые задачи для уравнений смешанного типа в частных производных представляют собой одно из классических и активно развивающихся направлений современной математической физики. Начиная с пионерских работ Трикоми [1], Франкля [2] и Бицадзе [3], был достигнут значительный прогресс в изучении уравнений, тип которых меняется внутри области. Такие уравнения сочетают в себе аналитические свойства эллиптических и гиперболических уравнений, что порождает широкий спектр сложных математических проблем, связанных с разрешимостью, единственностью и построением явных решений. Фундаментальные результаты классической теории изложены в монографиях [1], [3], [4], а также в работах Келдыша [5], посвящённых вырождающимся уравнениям.

Настоящая работа продолжает цикл исследований, посвящённых трёхмерному уравнению смешанного типа с двумя операторами Бесселя и двумя плоскостями смены типа. В отличие от первой краевой задачи для этого же уравнения, изученной теми же авторами [6], где на плоскостях задавалось условие Дирихле, в настоящей статье на этих же плоскостях задаётся условие Неймана - обращение в нуль нормальной производной; соответствующую задачу мы обозначаем через DN. Такая замена типа граничного условия существенно меняет структуру

одномерной спектральной задачи по переменной. $x = \pm 1$

Как и в задаче с условием Дирихле, при разделении переменных возникает несамосопряжённая спектральная задача по, собственные функции которой не образуют ортогональной системы; для неё строится сопряжённая (биортогональная) система. При определённых соотношениях между спектральными параметрами возникает проблема малых знаменателей, для преодоления которой получены оценки снизу соответствующих знаменателей и установлены достаточные условия сходимости построенных рядов. x

2. Обзор литературы

Важный класс смешанных уравнений составляют уравнения, содержащие сингулярные дифференциальные операторы бесселевского типа. Такие операторы естественно возникают при рассмотрении весовых краевых задач в областях с геометрическими особенностями или осевой симметрией, что впервые было отмечено Вайнштейном [7]. Соответствующий аналитический аппарат базируется на теории функций Бесселя [8], специальных функциях [9], теории Штурма–Лиувилля [10] и разложениях Фурье–Бесселя [11]. Эти методы оказались эффективными при исследовании многомерных краевых задач с сингулярными коэффициентами (см. [12], [13], [14], [15], [16]).

В последние десятилетия значительное внимание уделяется многомерным уравнениям смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Различные задачи типа Дирихле, Трикоми и Франкля исследовались с применением методов разделения переменных, функций Грина, интегральных преобразований и спектральной теории; разложения Фурье–Бесселя стали при этом ключевым инструментом для построения точных решений [17], [18], [19]. Однако подавляющее большинство имеющихся результатов относится к уравнениям, содержащим лишь один оператор Бесселя, либо к областям с одной поверхностью смены типа; сравнительно мало изучены трёхмерные уравнения смешанного типа, одновременно включающие два оператора Бесселя и две плоскости изменения типа. В этой ситуации вспомогательные спектральные задачи приобретают существенно более сложную структуру: одна из них становится несамосопряжённой и требует построения биортогональной системы собственных функций [20], [21]; при определённых соотношениях спектральных параметров возникает, кроме того, проблема «малых знаменателей», хорошо известная в теории нелинейных колебаний и задачах устойчивости [22], однако в контексте уравнений смешанного типа с бесселевыми операторами изученная недостаточно.

3. Методология исследования

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sgn}(xy)u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\beta}{y}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z = 0 \quad (1)$$

$$\Omega \setminus (\{x=0\} \cup \{y=0\}),$$

в области где

$$\Omega = \{(x, y, z) : x \in (-1, 1), y \in (-a, b), z \in (0, c)\}, a, b, c \in R^+, \beta \in (0, 1/2), \gamma \in (-\infty, 1/2)$$

Уравнению (1) можно представить в виде

$$(\operatorname{sgn}(xy) B_{-1/2}^x + B_{\beta-1/2}^y + B_{\gamma-1/2}^z) u(x, y, z) = 0.$$

Здесь и далее, для удобства и компактности используется обозначение. Отметим, что обозначение при совпадает

$$B_q^y \equiv \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{2q+1}{y} \frac{\partial}{\partial y} B_q^y \quad q > -1/2$$

с оператором Бесселя, введенным в работе [23].

$$\text{Введём следующие обозначения: } \Omega_1 = \Omega \cap \{x > 0, y > 0\}, \Omega_2 = \Omega \cap \{x > 0, y < 0\}$$

$$\Omega_3 = \Omega \cap \{x < 0, y < 0\} \quad \Omega_4 = \Omega \cap \{x < 0, y > 0\}$$

Уравнение (1) в области Ω принадлежит смешанному типу, а именно в областях и принадлежит эллиптическому типу, а в областях и -гиперболическому типу. Плоскости и являются плоскостями сингулярности коэффициентов

$$\Omega_1 \quad \Omega_3 \quad \Omega_2 \quad \Omega_4 \quad y=0 \quad z=0 \quad x=0 \quad y=0$$

уравнения, а и -плоскостями изменения типа.

В отличие от задачи D, изученной в работе [6] теми же авторами, где на плоскостях задавалось условие Дирихле, здесь на этих же плоскостях задаётся условие Неймана - обращение в нуль нормальной производной.

$$\text{Соответствующую задачу обозначим через DN. } x = \pm 1$$

В области Ω для уравнения (1) сформулируем и исследуем следующую задачу.

Задача DN. Найти функцию, удовлетворяющую в области уравнению (1) и условиям $u(x, y, z)$

$$\Omega \setminus (\{x=0\} \cup \{y=0\})$$

$$u(x, y, z) \in C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4), \quad u, u_x, z^{2\gamma} u_z \in C(\bar{\Omega}), \quad (2)$$

$$u_x(-1, y, z) = 0, \quad u_x(1, y, z) = 0, \quad y \in (-a, 0) \cup (0, b), \quad z \in (0, c), \quad (3)$$

$$u(x, -a, z) = f_1(x, z), \quad u(x, b, z) = f_2(x, z), \quad x \in [-1, 1], z \in [0, c], \quad (4)$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u(x, y, c) = 0, \quad x \in [-1, 1], \quad y \in [-a, b], \quad (5)$$

а также условию склеивания

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} u_y(x, y, z) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} u_y(x, y, z), \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad z \in (0, c) \quad (6)$$

$$\text{где } f_1 \text{ и } f_2 \text{ – заданные функции, причём выполняются условия согласования. } f_1(x, z) \quad f_2(x, z)$$

$$f_j(x, 0) = f_j(x, c) = 0, \quad j = 1, 2$$

3.2. Построение нетривиальных решений задачи DN

Находим нетривиальные в области, решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (2), (3), (5) и (6). С этой

$$\text{целью, разделяя переменные по формуле, получим уравнения } \Omega_j, \quad j = \overline{1, 4} \quad u(x, y, z) = X(x)W(y,z)$$

$$\operatorname{sgn}(x) X''(x) + dX(x) = 0, \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad (7)$$

$$\operatorname{sgn}(y) (B_{\beta-1/2}^y + B_{\gamma-1/2}^z - d) W(y, z) = 0, \quad y \in (-a, 0) \cup (0, b), \quad (8)$$

$$\text{где } d \text{ – константа разделения. Путём разделения переменных, из (8) получим } d = \mu^2 W(y, z) = Q(y)Z(z)$$

$$B_{\gamma-1/2}^z Z(z) + \lambda Z(z) = 0, \quad z \in (0, c), \quad (9)$$

$$B_{\beta-1/2}^y Q(y) - (d \operatorname{sgn} y + \lambda) Q(y) = 0, \quad y \in (-a, 0) \cup (0, b), \quad (10)$$

где λ – константа разделения. В силу условий (2), (3), (5) и (6) должны быть выполнены условия

$$X(0-0) = X(0+0), \quad X'(0-0) = X'(0+0), \quad (11)$$

$$X'(-1) = 0, \quad X'(1) = 0, \quad (12)$$

$$Q(0+0) = Q(0+0), \quad \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} Q'(y) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} Q'(y), \quad (13)$$

$$Z(0) = 0, \quad Z(c) = 0. \quad (14)$$

$$Z(z)$$

3.2.1. Решение задачи для

Предположим, что. Тогда, произведя замену в уравнении (9), где, получим уравнение Бесселя вида $\lambda < 0$

$$Z(z) = \left(t/\sqrt{-\lambda}\right)^{1/2-\gamma} p(t) \quad t = \sqrt{-\lambda} z$$

$$t^2 p''(t) + tp'(t) - \left[t^2 + (1/2 - \gamma)^2\right] p(t) = 0$$

Принимая во внимание вид общего решения этого уравнения [8] и введенные обозначения, получим общее решение уравнения (9) в виде

$$Z(z) = c_1 z^{1/2-\gamma} I_{1/2-\gamma}(\sqrt{-\lambda} z) + c_2 z^{1/2-\gamma} K_{1/2-\gamma}(\sqrt{-\lambda} z), \quad (15)$$

здесь и -произвольные постоянные, и – функция Бесселя мнимого аргумента (функция Инфельда) и функция

$$\text{Макдональда порядка [8] соответственно. } c_1 \quad c_2 \quad I_l(z) \quad K_l(z) \quad l$$

Подставляя (15) в краевые условия (14), имеем, следовательно, в этом случае задача {(9), (14)}, не имеет

$$\text{нетривиальных решений. } c_1 = c_2 = 0$$

Пусть. Тогда, в силу, общее решение уравнения (9) имеет вид, где и -произвольные постоянные.

Подставляя эту функцию в краевые условия (14), имеем. Следовательно, в этом случае также задача {(9), (14)} не

$$\text{имеет нетривиальных решений. } \lambda = 0 \quad \gamma < 1/2 \quad Z(z) = c_3 z^{1-2\gamma} + c_4 \quad c_3 = c_4 = 0$$

Пусть. Тогда, произведя замену в уравнении (9) по формуле, где, получим уравнение Бесселя [8]: $\lambda > 0$

$$Z(z) = \left(t/\sqrt{\lambda}\right)^{1/2-\gamma} p(t) \quad t = \sqrt{\lambda} z$$

$$t^2 p''(t) + tp'(t) + \left[t^2 - (1/2 - \gamma)^2\right] p(t) = 0. \quad (16)$$

Принимая во внимание вид общего решения [8] уравнения (16) и введенные обозначения, получим общее решение уравнения (9) в виде

$$Z(z) = c_5 z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda} z) + c_6 z^{1/2-\gamma} Y_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda} z), \quad (17)$$

где, -произвольные постоянные, и - функция Бесселя порядка первого и второго рода [8] соответственно. $c_5 \quad c_6$

$$J_l(z) \quad Y_l(z) \quad l$$

Из (17) в силу следует, что решение уравнения (9), удовлетворяющее первому условию (14), существует и

$$\text{оно определяется равенством } \gamma < 1/2$$

$$Z(z) = c_5 z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda} z). \quad (18)$$

Подставляя (18) ко второму условию (14) и считая, получим $c_5 \neq 0$

$$J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda} c) = 0. \quad (19)$$

Известно, что при функция Бесселя имеет счетное число нулей, причем все они вещественны и с попарно противоположными знаками [8]. Согласно этому факту, в силу, уравнение (19) имеет счетное число вещественных корней. Обозначая через m -ый положительный корень уравнения (19), получим значения параметра, при которых существуют нетривиальные решения задачи $\{(9), (14)\}$, т.е. собственные значения задачи $\{(9), (14)\}$: $l > -1$

$$J_l(z) \frac{1}{2} - \gamma > 0 \quad \sigma_m - \lambda \quad \lambda = \lambda_m = (\sigma_m / c)^2, \quad m \in N$$

Полагая в (18), получим (с точностью до постоянного множителя) нетривиальные решения (собственные

функции) задачи $\{(9), (14)\}$: $\lambda = \lambda_m, m \in N$

$$Z_m(z) = z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z / c), \quad m \in N. \quad (20)$$

Согласно работе [8], система собственных функций (20) ортогональна и полна в пространстве с весом.

$$L_2(0, c) z^{2\gamma}$$

3.2.2. Решение задачи для $X(x)$

Теперь перейдем к исследованию задачи $\{(7), (11), (12)\}$. Решениями уравнения (7), удовлетворяющими условию склейки (11), являются функции

$$X(x) = \begin{cases} c_7 \cos \mu x + c_8 \sin \mu x, & x > 0, \\ c_7 \operatorname{ch} \mu x + c_8 \operatorname{sh} \mu x, & x < 0, \end{cases} \quad (21)$$

где c_7, c_8 – произвольные постоянные, а знак или определяет, на какой из полуосей стоит тригонометрическая, а на

какой – гиперболическая ветвь. $c_7, c_8 \quad d = \mu^2 \quad d = -\mu^2$

Рассмотрим сначала ветвь. Подчиняя (21) условию Неймана (12), из получим т.е., а из получим. Приравнявая

найденные значения, приходим к характеристическому уравнению $d = \mu^2 \quad X'(1) = 0 \quad c_8 \cos \mu = c_7 \sin \mu,$

$$c_8 = c_7 \operatorname{tg} \mu \quad X'(-1) = 0 \quad c_8 = c_7 \operatorname{th} \mu \quad c_8$$

$$\operatorname{tg} \mu = \operatorname{th} \mu. \quad (22)$$

Уравнение, как и рассмотренное в [20] уравнение, имеет счетное множество простых действительных корней.

Стандартным асимптотическим анализом (аналогично лемме 1 работы [20], с точностью до сдвига фазы на)

находим, что при $\operatorname{tg} \mu = \operatorname{th} \mu \quad \operatorname{tg} \mu = -\operatorname{th} \mu \pm \mu_n \quad (n \in N) \quad \pi / 2 \quad n \rightarrow \infty$

$$\mu_n = \frac{\pi}{4} + \pi n + O(e^{-2\pi n}), \quad n \in N. \quad (23)$$

Принципиальное отличие задачи DN от задачи D состоит в том, что также является (точным) корнем уравнения (22): При уравнение (7) вырождается в, откуда линейна на каждом из промежутков и; условие склейки (11) делает

такую функцию линейной на всём, а условие Неймана (12) обращает в нуль её угловой коэффициент.

Следовательно, при задача $\{(7), (11), (12)\}$ имеет одномерное пространство нетривиальных решений, порождённое

постоянной функцией $\mu = 0 \quad \operatorname{tg} 0 = \operatorname{th} 0 = 0 \quad d = 0 \quad \operatorname{sgn}(x) X''(x) = 0 \quad X(x) \quad x > 0 \quad x < 0 \quad (-1, 1) \quad d = 0$

$$X_0(x) \equiv 1, \quad d_0 = \mu_0^2 = 0. \quad (24)$$

Для стандартным образом, как и в задаче D [6], строятся две собственные функции – одна для ветви, другая для ветви. Подставляя в (21) найденные соотношения, а также аналогичные соотношения для второй ветви, получим

$$n \in N \quad d = \mu_n^2 \quad d = -\mu_n^2 \quad c_8 = c_7 \operatorname{tg} \mu_n \quad c_8 = c_7 \operatorname{th} \mu_n$$

$$X_n^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{\cos[\mu_n(x-1)]}{\cos \mu_n}, & x > 0, \\ \frac{\operatorname{ch}[\mu_n(x+1)]}{\operatorname{ch} \mu_n}, & x < 0, \end{cases} \quad X_n^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{ch}[\mu_n(x-1)]}{\operatorname{ch} \mu_n}, & x > 0, \\ \frac{\cos[\mu_n(x+1)]}{\cos \mu_n}, & x < 0. \end{cases} \quad (25)$$

3.2.3. Сопряжённая (биортогональная) система

Система не является ортогональной в. Поэтому, как и в задаче D, рассмотрим сопряжённую задачу. Стандартным способом (умножая уравнение для n , уравнение для m , вычитая и интегрируя по частям на $(-1,0)$ и на $(0,1)$)

устанавливается, что билинейная форма $\left\{ X_0(x), X_n^{(1)}(x), X_n^{(2)}(x) \right\}_{L_2(-1,1)} X(x) \tilde{X}(x) \tilde{X}'(x) X(x)$

$$\left[X'(x) \tilde{X}(x) - X(x) \tilde{X}'(x) \right]_{-1}^1 \quad (\text{с учётом склейки при } x=0) \text{ обращается в нуль для всех решений исходной}$$

задачи тогда и только тогда, когда удовлетворяет тому же уравнению $x=0 \quad X(x) \tilde{X}(x)$

$$\operatorname{sgn} x \cdot \tilde{X}''(x) + d\tilde{X}(x) = 0, \quad x \in (-1,0) \cup (0,1) \quad (26)$$

но с антисимметричным условием склейки и - поскольку боковые члены на в задаче DN содержат множитель - с

тем же неймановским условием на концах: $x = \pm 1 \quad X(\pm 1) \tilde{X}'(\pm 1)$

$$\tilde{X}(0-0) = -\tilde{X}(0+0), \quad \tilde{X}'(0-0) = -\tilde{X}'(0+0), \quad \tilde{X}'(-1) = 0, \quad \tilde{X}(1) = 0. \quad (27)$$

Решая задачу $\{(26),(27)\}$ тем же приёмом, что и выше, получаем нулевую моду

$$\tilde{X}_0(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad (28)$$

и, для, пару функций $n \in N$

$$\tilde{X}_n^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{\cos[\mu_n(x-1)]}{\cos \mu_n}, & x > 0, \\ -\frac{ch[\mu_n(x+1)]}{ch \mu_n}, & x < 0, \end{cases} \quad \tilde{X}_n^{(2)}(x) = \begin{cases} -\frac{ch[\mu_n(x-1)]}{ch \mu_n}, & x > 0, \\ -\frac{\cos[\mu_n(x+1)]}{\cos \mu_n}, & x < 0. \end{cases} \quad (29)$$

Непосредственной проверкой устанавливается биортогональность построенных систем: справедливо равенство

$$\int_{-1}^1 X_n^{(j)}(x) \tilde{X}_m^{(l)}(x) dx = 0, \quad n \neq m, \quad j, l = 1, 2; \quad \int_{-1}^1 X_0(x) \tilde{X}_m^{(l)}(x) dx = 0, \quad m \geq 1 \quad (30)$$

Аналогично [20], имеет место следующее утверждение (доказывается методом работы [21], посвящённой второй краевой задаче для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с двумя линиями смены типа, – задаче, чья одномерная часть по x в точности совпадает с задачей $\{(7),(11),(12)\}$).

Лемма 1. Система полна в пространстве. $\left\{ \tilde{X}_0(x), \tilde{X}_n^{(1)}(x), \tilde{X}_n^{(2)}(x) \right\}, \quad n \in N \quad L_1(-1,1)$

3.2.4. Решение задачи для и построение общего члена ряда $Q(y)$

Теперь рассмотрим уравнение (10). Решение данного уравнения в общем виде также не относится к числу классических задач ввиду наличия множителя. Поскольку собственные значения, и принадлежат различным, взаимно независимым спектральным задачам, соотношение между ними может носить различный характер. В зависимости от знака выражения в общем решении уравнения (10) могут входить функции Бесселя первого и второго рода либо их модифицированные аналоги. В связи с этим только рассмотрим случаи, и. Полагая в

уравнении (10), и, найдем его общее решение: $\operatorname{sgn} y \quad m \quad d_n^{(2)} = -\mu_n^2 \quad \lambda_m = (\sigma_m / c)^2 \quad \mu_n^2 - \lambda_m \quad \lambda_m > \mu_n^2$

$$\lambda_m < \mu_n^2 \quad m \quad d_n^{(2)} = -\mu_n^2 \quad \lambda = \lambda_m$$

$$Q_{nm}^{(1)}(y) = |y|^{1/2-\beta} \begin{cases} A_{nm}^{(1)} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\alpha_{nm}^+} y) + B_{nm}^{(1)} K_{1/2-\beta}(\sqrt{\alpha_{nm}^+} y), & y > 0, \\ C_{nm}^{(1)} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\alpha_{nm}^-} (-y)) + D_{nm}^{(1)} K_{1/2-\beta}(\sqrt{\alpha_{nm}^-} (-y)), & \lambda_m > \mu_n^2, \\ E_{nm}^{(1)} J_{1/2-\beta}(\sqrt{-\alpha_{nm}^-} (-y)) + F_{nm}^{(1)} Y_{1/2-\beta}(\sqrt{-\alpha_{nm}^-} (-y)), & \lambda_m < \mu_n^2, \end{cases} \quad y < 0, \quad (31)$$

$$Q_{nm}^{(2)}(y) = |y|^{1/2-\beta} \begin{cases} A_{nm}^{(2)} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\alpha_{nm}^-} y) + B_{nm}^{(2)} K_{1/2-\beta}(\sqrt{\alpha_{nm}^-} y), & \lambda_m > \mu_n^2, \\ C_{nm}^{(2)} J_{1/2-\beta}(\sqrt{-\alpha_{nm}^-} y) + D_{nm}^{(2)} Y_{1/2-\beta}(\sqrt{-\alpha_{nm}^-} y), & \lambda_m < \mu_n^2, \\ E_{nm}^{(2)} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\alpha_{nm}^+} (-y)) + F_{nm}^{(2)} K_{1/2-\beta}(\sqrt{\alpha_{nm}^+} (-y)), & y < 0, \end{cases} \quad y > 0, \quad (32)$$

где, а пока неизвестные коэффициенты. $\alpha_{nm}^+ = \lambda_m + \mu_n^2$ $\alpha_{nm}^- = \lambda_m - \mu_n^2$

$$A_{nm}^{(j)}, B_{nm}^{(j)}, C_{nm}^{(j)}, D_{nm}^{(j)}, E_{nm}^{(j)}, F_{nm}^{(j)} \quad j = \overline{1, 2} -$$

Теперь подберем постоянные и так, чтобы выполнялись условия (13). $A_{nm}^{(j)}, B_{nm}^{(j)}, C_{nm}^{(j)}, D_{nm}^{(j)}, E_{nm}^{(j)}$

$$F_{nm}^{(j)}$$

Из (31) в силу следует, что первое из равенств (13) выполнено, если $\beta \in (0, 1/2)$

$$D_{nm}^{(1)} = \left(\eta_{nm}^+ \right)^{-1} B_{nm}^{(1)}, \quad \lambda_m > \mu_n^2, \quad F_{nm}^{(1)} = -\frac{\pi}{2} \left(\eta_{nm}^- \right)^{-1} B_{nm}^{(1)}, \quad \lambda_m < \mu_n^2$$

при любых, и, а второе равенство имеет место, при $(4, q) = 1, p, q \in N$ $E_{nm}^{(1)}$

$$C_{nm}^{(1)} = -\eta_{nm}^+ A_{nm}^{(1)} + \frac{\pi}{2 \cos \beta \pi} \left[\eta_{nm}^+ + \left(\eta_{nm}^+ \right)^{-1} \right] B_{nm}^{(1)}, \quad \lambda_m > \mu_n^2$$

$$E_{nm}^{(1)} = -\eta_{nm}^- A_{nm}^{(1)} + \frac{\pi}{2 \cos \beta \pi} \left[\sin(\beta \pi) \left(\eta_{nm}^- \right)^{-1} + \eta_{nm}^- \right] B_{nm}^{(1)}, \quad \lambda_m < \mu_n^2,$$

$$\eta_{nm}^+ = \left(\alpha_{nm}^+ / \alpha_{nm}^- \right)^{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \beta \right)}, \quad \eta_{nm}^- = \left(-\alpha_{nm}^+ / \alpha_{nm}^- \right)^{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \beta \right)}.$$

где

С учетом этих равенств, функция (26) перепишется в вид

$$Q_{nm}^{(1)}(y) = |y|^{\frac{1}{2}-\beta} \begin{cases} A_{nm}^{(1)} I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} y \right) + B_{nm}^{(1)} K_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} y \right), y > 0; \\ -A_{nm}^{(1)} \eta_{nm} I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^-} |y| \right) + \\ + B_{nm}^{(1)} \left[\frac{\pi}{2 \cos \beta \pi} \left(\eta_{nm}^+ + \left(\eta_{nm}^+ \right)^{-1} \right) I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^-} |y| \right) + \right. \\ \left. + \left(\eta_{nm}^+ \right)^{-1} K_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^-} |y| \right) \right], \lambda_m > \mu_n^2, y < 0; \\ -A_{nm}^{(1)} \eta_{nm}^- J_{1/2-\beta} \left(\sqrt{-\alpha_{nm}^-} |y| \right) + \\ + B_{nm}^{(1)} \left[\frac{\pi}{2 \cos \beta \pi} \left(\sin(\beta \pi) \left(\eta_{nm}^- \right)^{-1} + \eta_{nm}^- \right) J_{1/2-\beta} \left(\sqrt{-\alpha_{nm}^-} |y| \right) - \right. \\ \left. - \frac{\pi}{2} \left(\eta_{nm}^- \right)^{-1} Y_{1/2-\beta} \left(\sqrt{-\alpha_{nm}^-} |y| \right) \right], \lambda_m < \mu_n^2, y < 0. \end{cases} \quad (33)$$

Из (32) аналогично находим

$$Q_{nm}^{(2)}(y) = |y|^{\frac{1}{2}-\beta} \begin{cases} -E_{nm}^{(2)} \eta_{nm}^+ I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^-} y \right) + \\ + F_{nm}^{(2)} \left[\frac{\pi}{2 \cos \beta \pi} \left(\eta_{nm}^+ + \left(\eta_{nm}^+ \right)^{-1} \right) I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^-} y \right) + \right. \\ \left. + \left(\eta_{nm}^+ \right)^{-1} K_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^-} y \right) \right], \lambda_m > \mu_n^2, y > 0; \\ -E_{nm}^{(2)} \eta_{nm}^- J_{1/2-\beta} \left(\sqrt{-\alpha_{nm}^-} y \right) + \\ + F_{nm}^{(2)} \left[\frac{\pi}{2 \cos \beta \pi} \left(\sin \beta \pi \left(\eta_{nm}^- \right)^{-1} + \eta_{nm}^- \right) J_{1/2-\beta} \left(\sqrt{-\alpha_{nm}^-} y \right) - \right. \\ \left. - \frac{\pi}{2} \left(\eta_{nm}^- \right)^{-1} Y_{1/2-\beta} \left(\sqrt{-\alpha_{nm}^-} y \right) \right], \lambda_m < \mu_n^2, y > 0; \\ E_{nm}^{(2)} I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} (-y) \right) + F_{nm}^{(2)} K_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} (-y) \right), y < 0. \end{cases} \quad (34)$$

Отдельно рассмотрим случай, отвечающий нулевому собственному значению (см. (24)). В этом случае уравнение

$$(10) \text{ принимает вид } n = 0 \quad d_0 = \mu_0^2$$

$$B_{\beta-1/2}^y Q(y) - \lambda Q(y) = 0, \quad y \in (-a, 0) \cup (0, b), \quad (35)$$

не содержащий множителя, поскольку; тем самым уравнение (35), в отличие от уравнения (10) при, имеет один и тот же вид при и при. Полагая в общем решении (31) (тогда,) и учитывая условие (13), получаем общее решение

$$\text{уравнения (35): } \operatorname{sgn} y \quad d_0 = 0 \quad n \in N \quad y > 0 \quad y < 0 \quad \mu_n \rightarrow 0 \quad \alpha_{nm}^+ \rightarrow \lambda_m \quad \alpha_{nm}^- \rightarrow \lambda_m \quad \eta_{nm}^+ \rightarrow 1$$

$$Q_{0m}(y) = |y|^{1/2-\beta} \begin{cases} A_{0m} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m} y) + B_{0m} K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m} y), & y > 0, \\ \left[-A_{0m} + \frac{\pi}{\cos \beta \pi} B_{0m} \right] I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m} |y|) + \\ + B_{0m} K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_m} |y|), & y < 0, \end{cases} \quad (36)$$

где, а пока неизвестные коэффициенты. Таким образом, наряду с парой функций, отвечающих собственным функциям общее решение уравнения (10) во всём диапазоне содержит ещё одну, «одиночную», функцию отвечающую собственной функции. Появление этой дополнительной компоненты - прямое следствие того, что, в отличие от задачи D, в задаче DN спектральная задача $\{(7),(11),(12)\}$ обладает нулевым собственным значением с нетривиальной (постоянной) собственной функцией: действительно, при уравнение (7) вырождается в, общее решение которого линейно на каждом из промежутков и; условие склейки (11) делает такую функцию линейной на всём, а условие Неймана (12) обращает в нуль её угловой коэффициент, откуда и возникает нетривиальное решение. Заметим, что в задаче D тот же формальный корень уравнения не порождает нетривиальной собственной функции, поскольку условие Дирихле применённое к линейной функции, оставляет только тривиальное решение; в этом и состоит принципиальное отличие задачи DN от задачи D, отмеченное во

Введении. $m \in N$ $A_{0m}, B_{0m} - Q_{nm}^{(1)}(y), Q_{nm}^{(2)}(y), n \in N$ $X_n^{(1)}(x), X_n^{(2)}(x), n = 0, 1, 2, \dots$ $Q_{0m}(y),$
 $X_0(x) \equiv 1. d_0 = 0$ $d = 0$ $\operatorname{sgn}(x) X''(x) = 0$ $(-1, 0) (0, 1) (-1, 1)$ $X_0(x) \equiv 1. \mu = 0$ $\operatorname{tg} \mu = -th \mu$
 $X(\pm 1) = 0, X(x) = c_1 x + c_2$ $c_1 = c_2 = 0$

Этим завершается построение нетривиальных решений задачи DN.

4. Единственность решения задачи DN

Пусть $u(x, y, z)$ - решение задачи DN. Наряду с функциями

$$\omega_{nm}^{(1)}(y) = s_m \int_{-1}^c \int_{-1}^1 u(x, y, z) \tilde{X}_n^{(1)}(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz, \quad n, m \in N, \quad (37)$$

$$\omega_{nm}^{(2)}(y) = s_m \int_{-1}^c \int_{-1}^1 u(x, y, z) \tilde{X}_n^{(2)}(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz, \quad n, m \in N, \quad (38)$$

где и определены равенствами (29) и (20), рассмотрим также функцию, отвечающую нулевой моде,

$$\tilde{X}_n^{(1)}(x), \tilde{X}_n^{(2)}(x) Z_m(z) s_m = \|Z_m\|_{L_{2,q}(0,c)}^{-2}$$

$$\omega_{0m}(y) = s_m \int_{-1}^c \int_{-1}^1 u(x, y, z) \tilde{X}_0(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz, \quad m \in N, \quad (39)$$

где определена равенством (28). $\tilde{X}_0(x) = \operatorname{sgn} x$

Стандартным приёмом - введением регуляризации области интегрирования по x и y , применением уравнения (1) в форме двукратным интегрированием по частям по x и y на x и y раздельно, интегрированием по частям по z и последующим предельным переходом с использованием условий (2), (3), (5), (6), а также условий (12), (14), (24), (27) для функций - устанавливается (совершенно так же, как это делалось при выводе уравнений (9)-(10) из уравнения (1) в §3), что функции (37) и (38) удовлетворяют уравнению (10) при $x \rightarrow -1, 0$ и $x \rightarrow 0, 1$, соответственно, т.е.

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta_1, \delta_2 \rightarrow 0 \quad \left(\operatorname{sgn}(xy) B_{-1/2}^x + B_{\beta-1/2}^y + B_{\gamma-1/2}^z \right) u(x, y, z) = 0, \quad x \rightarrow (-1, 0) (0, 1) \quad z$$

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta_1, \delta_2 \rightarrow 0 \quad X_n^{(1,2)}, \tilde{X}_n^{(1,2)}, Z_m \quad d = \mu_n^2 \quad \lambda = \lambda_m \quad d = -\mu_n^2 \quad \lambda = \lambda_m$$

$$\omega_{nm}^{(1)}(y) = Q_{nm}^{(1)}(y), \quad \omega_{nm}^{(2)}(y) = Q_{nm}^{(2)}(y) \quad (40)$$

где функции определены равенствами (33), (34). $Q_{nm}^{(1)}(y), Q_{nm}^{(2)}(y)$

Для функции те же преобразования упрощаются: поскольку, уже однократного интегрирования по частям по достаточно, чтобы внеинтегральные слагаемые обратились в нуль тождественно – при в силу условия Неймана (3), а при в силу непрерывности, входящей в условие гладкости (2). С учётом самосопряжённости оператора с весом (в том же смысле, что используется ниже при выводе (67)) отсюда получаем, что функция удовлетворяет уравнению

$$(35), \text{ т.е. } \omega_{0m}(y) X_0''(x) \equiv 0 \quad x = \pm 1 \quad x = 0 \quad u_x(x, y, z) B_{\gamma-1/2}^z z^{2\gamma} \omega_{0m}(y) \\ \omega_{0m}(y) = Q_{0m}(y), \quad (41)$$

где определена равенством (36). $Q_{0m}(y)$

В силу граничных условий (4) из (37)-(39) следует, что функции и удовлетворяют условиям $\omega_{nm}^{(1)}(y), \omega_{nm}^{(2)}(y)$ $\omega_{0m}(y)$

$$\omega_{nm}^{(1)}(-a) = f_{1nm}^{(1)}, \quad \omega_{nm}^{(1)}(b) = f_{2nm}^{(1)}(y), \quad \omega_{nm}^{(2)}(-a) = f_{1nm}^{(2)}, \quad \omega_{nm}^{(2)}(b) = f_{2nm}^{(2)}(y), \\ \omega_{0m}(-a) = f_{10m}, \quad \omega_{0m}(b) = f_{20m}(y), \quad (43)$$

где

$$f_{jnm}^{(1)} = s_m \int_0^c \int_{-1}^1 f_j(x, z) \tilde{X}_n^{(1)}(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz, \\ f_{jnm}^{(2)} = s_m \int_0^c \int_{-1}^1 f_j(x, z) \tilde{X}_n^{(2)}(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz, \quad n, m \in N, \quad j = \overline{1, 2}, \quad (44) \\ f_{j0m} = s_m \int_0^c \int_{-1}^1 f_j(x, z) \operatorname{sgn} x \cdot z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz, \quad m \in N, \quad j = \overline{1, 2}. \quad (45)$$

Отсюда следует, что функции и, определяемые формулами (37)-(39), являются решениями уравнения (10) (соответственно уравнения (35) при), удовлетворяющими условиям (42), (43). Для решения этой задачи, как и в 3.2.4, рассмотрим отдельно случаи и; заметим, что при неравенство выполняется всегда, так что нулевая мода

всегда относится к первому из этих случаев. $\omega_{nm}^{(1)}(y), \omega_{nm}^{(2)}(y) \quad \omega_{0m}(y) \quad n = 0 \quad \lambda_m > \mu_n^2 \quad \lambda_m < \mu_n^2 \quad n = 0$ $\lambda_m > \mu_n^2 = 0$

4.1. Доказательство единственности решения задачи DN при $\lambda_m > \mu_n^2$

Удовлетворяя общее решение (33) (при и) и (34) (при и) уравнения (10) условиям (42), получаем при систему для нахождения неизвестных коэффициентов, и:

$$d = \mu_n^2 \quad \lambda = \lambda_m \quad d = -\mu_n^2 \quad \lambda = \lambda_m \quad n \in N \quad A_{nm}^{(1)} \quad B_{nm}^{(1)} \quad E_{nm}^{(2)} \quad F_{nm}^{(2)} \\ \begin{cases} A_{nm}^{(1)} I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} b \right) + B_{nm}^{(1)} K_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} b \right) = b^{\beta-1/2} f_{2nm}^{(1)}, \\ -A_{nm}^{(1)} \eta_{nm}^+ I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^-} a \right) + B_{nm}^{(1)} M_{nm}(a) = a^{\beta-1/2} f_{1nm}^{(1)}, \end{cases} \quad (46)$$

$$\begin{cases} -E_{nm}^{(2)} \eta_{nm}^+ I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^-} b \right) + F_{nm}^{(2)} M_{nm}(b) = b^{\beta-1/2} f_{2nm}^{(2)}, \\ E_{nm}^{(2)} I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} a \right) + F_{nm}^{(2)} K_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} a \right) = a^{\beta-1/2} f_{1nm}^{(2)}, \end{cases} \quad (47)$$

где Определители систем (46), (47),

$$\begin{aligned} M_{nm}(t) &= \frac{\pi}{2 \cos \beta \pi} \left(\eta_{nm}^+ + \left(\eta_{nm}^+ \right)^{-1} \right) I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^-} t \right) + \left(\eta_{nm}^+ \right)^{-1} K_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^-} t \right). \\ \Delta_{nm}^{(1)}(a, b) &= I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} b \right) M_{nm}(a) + \eta_{nm}^+ K_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} b \right) I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^-} a \right), \\ \Delta_{nm}^{(2)}(a, b) &= I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} a \right) M_{nm}(b) + \eta_{nm}^+ K_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} a \right) I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^-} b \right), \end{aligned} \quad (48)$$

строго положительны при всех, и (): все слагаемые в (48), (49) представляют собой произведения значений модифицированных функций Бесселя и величины. Поэтому системы (46), (47) однозначно разрешимы; в частности, $a, b > 0$ $\beta \in (0, 1/2)$ $\lambda_m > \mu_n^2 > 0$ $n \in N$ $I_\nu(t) > 0$, $K_\nu(t) > 0$, $t > 0$, $\nu > -1$ $\eta_{nm}^+ > 0$

$$\begin{aligned} A_{nm}^{(1)} &= \frac{b^{\beta-1/2} f_{2nm}^{(1)} M_{nm}(a) - a^{\beta-1/2} f_{1nm}^{(1)} K_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} b \right)}{\Delta_{nm}^{(1)}(a, b)}, \\ B_{nm}^{(1)} &= \frac{a^{\beta-1/2} f_{1nm}^{(1)} I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} b \right) + b^{\beta-1/2} f_{2nm}^{(1)} \eta_{nm}^+ I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^-} a \right)}{\Delta_{nm}^{(1)}(a, b)}, \end{aligned}$$

и аналогично для (с заменой). $E_{nm}^{(2)}, F_{nm}^{(2)}$ $a \leftrightarrow b$

Отдельно, при (), удовлетворяя решение (36) условиям (43), получаем систему $n = 0$

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 0, \alpha_{0m}^+ = \alpha_{0m}^- = \lambda_m, \eta_{0m}^+ = 1 \\ \begin{cases} A_{0m} I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\lambda_m} b \right) + B_{0m} K_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\lambda_m} b \right) = b^{\beta-1/2} f_{20m}^{(1)}, \\ -A_{0m} I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\lambda_m} a \right) + B_{0m} N_{0m}(a) = a^{\beta-1/2} f_{10m}^{(1)}, \end{cases} \end{aligned} \quad (50)$$

$$N_{0m}(t) = \frac{\pi}{\cos \beta \pi} I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\lambda_m} t \right) + K_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\lambda_m} t \right)$$

где, с определителем

$$\Delta_{0m}(a, b) = I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\lambda_m} b \right) N_{0m}(a) + K_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\lambda_m} b \right) I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\lambda_m} a \right). \quad (51)$$

Так как при, все слагаемые, входящие в и в, положительны, так что при всех Следовательно, система (50)

однозначно разрешима при всех: $\cos \beta \pi > 0$ $\beta \in (0, 1/2)$ $N_{0m}(t) \Delta_{0m}(a, b) \Delta_{0m}(a, b) > 0$

$a, b > 0$, $\beta \in (0, 1/2)$, $\lambda_m > 0$, $m \in N$. $m \in N$

$$\begin{aligned} A_{0m} &= \frac{b^{\beta-1/2} f_{20m} N_{0m}(a) - a^{\beta-1/2} f_{10m} K_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\lambda_m} b \right)}{\Delta_{0m}(a, b)}, \\ B_{0m} &= \frac{a^{\beta-1/2} f_{10m} I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\lambda_m} b \right) + b^{\beta-1/2} f_{20m} I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\lambda_m} a \right)}{\Delta_{0m}(a, b)}. \end{aligned}$$

Важное замечание. Поскольку для всех выполняется автоматически, определитель отвечает исключительно случаю «»: для нулевой моды проблема малых знаменателей, обсуждаемая ниже в §5.2,

$$\text{вообще не возникает. } \lambda_m > 0 = \mu_0^2 \quad m \in N \quad \Delta_{0m}(a, b) \quad \lambda_m > \mu_n^2$$

Теперь можем доказать следующую теорему.

Теорема 1. Если существует решение задачи DN, то оно единственно.

Доказательство. Пусть на. Тогда при всех, и в силу однозначной разрешимости систем (46), (47), (50) (при) получим для всех Следовательно, при всех, т.е. на основании (37)-(39)

$$\begin{aligned} f_{jnm}^{(1)} &= f_{jnm}^{(2)} = f_{j0m} = 0 \quad n, m \in N, \quad j = \overline{1, 2} \quad \Delta_{nm}^{(1)}, \Delta_{nm}^{(2)}, \Delta_{0m} > 0 \\ A_{nm}^{(1)} &= B_{nm}^{(1)} = E_{nm}^{(2)} = F_{nm}^{(2)} = A_{0m} = B_{0m} = 0 \quad n, m \in N. \quad \omega_{nm}^{(1)}(y) = \omega_{nm}^{(2)}(y) = \omega_{0m}(y) \equiv 0 \\ n, m &\in N, y \in [-a, b] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^c \int_{-1}^1 u(x, y, z) \tilde{X}_n^{(j)}(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz &= 0, \quad j = \overline{1, 2}, \\ \int_{-1}^c \int_{-1}^1 u(x, y, z) \operatorname{sgn} x \cdot z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz &= 0, \quad n, m \in N. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу полноты системы функций (20) в пространстве с весом и, следует, что и при всех Если учесть полноту системы, в пространстве (Лемма 1) и, из последних равенств вытекает, что в. Теорема 1 доказана.

$$\begin{aligned} L_2(0, c) \quad z^{2\gamma} u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}) \quad \int_{-1}^1 u(x, y, z) \tilde{X}_n^{(j)}(x) dx &= 0 \quad \int_{-1}^1 u(x, y, z) \operatorname{sgn} x dx = 0 \\ \left\{ \tilde{X}_0(x), \tilde{X}_n^{(1)}(x), \tilde{X}_n^{(2)}(x) \right\}, n \in N \quad L_1(-1, 1) u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}) \quad u(x, y, z) &\equiv 0 \quad \bar{\Omega} \end{aligned} \quad n \in N.$$

4.2. Доказательство единственности решения задачи DN при $\lambda_m < \mu_n^2$

Этот случай, как отмечено выше, затрагивает только моды (нулевая мода в нём не участвует, так как всегда).

Удовлетворяя общее решение (33) и (34) уравнения (10) условиям (42), получим систему для нахождения

$$\begin{aligned} \text{коэффициентов, и, } n \in N \quad n = 0 \quad \lambda_m > 0 = \mu_n^2 \quad A_{nm}^{(1)} \quad B_{nm}^{(1)} \quad E_{nm}^{(2)} \quad F_{nm}^{(2)} \\ \begin{cases} A_{nm}^{(1)} I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} b \right) + B_{nm}^{(1)} K_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} b \right) = b^{\beta-1/2} f_{2nm}^{(1)}, \\ -A_{nm}^{(1)} \eta_{nm}^- J_{1/2-\beta} \left(\sqrt{-\alpha_{nm}^-} a \right) + B_{nm}^{(1)} N_{nm}(a) = a^{\beta-1/2} f_{1nm}^{(1)}, \end{cases} \end{aligned} \quad (52a)$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} E_{nm}^{(2)} I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} a \right) + F_{nm}^{(2)} K_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} a \right) = a^{\beta-1/2} f_{1nm}^{(2)}, \\ -E_{nm}^{(2)} \eta_{nm}^- J_{1/2-\beta} \left(\sqrt{-\alpha_{nm}^-} b \right) + F_{nm}^{(2)} N_{nm}(b) = b^{\beta-1/2} f_{2nm}^{(2)}, \end{cases} \end{aligned} \quad (52b)$$

где

$$N_{nm}(t) = \frac{\pi}{2 \cos \beta \pi} \left(\sin(\beta \pi) (\eta_{nm}^-)^{-1} + \eta_{nm}^- \right) J_{1/2-\beta} \left(\sqrt{-\alpha_{nm}^-} t \right) - \frac{\pi}{2} (\eta_{nm}^-)^{-1} Y_{1/2-\beta} \left(\sqrt{-\alpha_{nm}^-} t \right). \quad (53)$$

Если при всех, для которых, определители систем (52a), (52b), $n, m \in N \quad \lambda_m < \mu_n^2$

$$\tilde{\Delta}_{nm}^{(1)}(a, b) = I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} b \right) N_{nm}(a) + \eta_{nm}^- J_{1/2-\beta} \left(\sqrt{-\alpha_{nm}^-} a \right) K_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} b \right), \quad (54)$$

$$\tilde{\Delta}_{nm}^{(2)}(a,b) = I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} a \right) N_{nm}(b) + \eta_{nm}^- J_{1/2-\beta} \left(\sqrt{-\alpha_{nm}^-} b \right) K_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} a \right), \quad (55)$$

отличны от нуля, то системы (52a), (52b) однозначно разрешимы, а функции определяются явными формулами

$$\text{того же типа, что и в §4.1 с заменой. } \omega_{nm}^{(1)}(y), \omega_{nm}^{(2)}(y)$$

$$\Delta_{nm}^{(j)} \rightarrow \tilde{\Delta}_{nm}^{(j)}, M_{nm} \rightarrow N_{nm}, I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^-} t \right) \rightarrow J_{1/2-\beta} \left(\sqrt{-\alpha_{nm}^-} t \right)$$

Пусть при некоторых и выполняется (или, аналогично,). Тогда однородная задача DN, где, имеет нетривиальное решение вида, построенное по образцу произведений (соответственно) с произвольным постоянным

$$\text{множителем. } a, b \quad n = k, m = l \in N \quad \tilde{\Delta}_{kl}^{(1)}(a,b) = 0 \quad \tilde{\Delta}_{kl}^{(2)}(a,b) = 0 \quad f_1(x,z), f_2(x,z)$$

$$X_k^{(1)}(x) Q_{kl}^{(1)}(y) Z_l(z) \quad X_k^{(2)}(x) Q_{kl}^{(2)}(y) Z_l(z)$$

Теорема 2. Если существует решение задачи DN, то оно единственно только тогда, когда, при всех, для

$$\text{которых. } \tilde{\Delta}_{nm}^{(j)}(a,b) \neq 0, \quad j = \overline{1,2} \quad n, m \in N \quad \lambda_m < \mu_n^2$$

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 1, с заменой ссылки на формулы (46)-(51) ссылкой на (52)-

$$(55) \text{ и с использованием той же Леммы 1 о полноте системы в. } \left\{ \tilde{X}_0(x), \tilde{X}_n^{(1)}(x), \tilde{X}_n^{(2)}(x) \right\}, \quad n \in N \quad L_1(-1,1)$$

5. Существование решения задачи DN

Рассмотрим существование решения задачи DN отдельно для случаев (для всех, включая) и (для некоторых).

$$\lambda_m > \mu_n^2 \quad n = 0 \quad \lambda_m < \mu_n^2 \quad n \in N$$

5.1. Существование решения задачи DN при $\lambda_m > \mu_n^2$

Теорема 3. Пусть функции удовлетворяющие условиям согласования

$$f_1(x,z), f_2(x,z) \in C^4([-1,1] \times [0,c]),$$

$$f_1(x,0) = f_1(x,c) = f_2(x,0) = f_2(x,c) = 0$$

$$\text{а также условию для всех рассматриваемых } \lambda_m > \mu_n^2 \quad n \in N \cup \{0\}, m \in N.$$

Тогда функция

$$u(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{0m}(y) Z_m(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\omega_{nm}^{(1)}(y) X_n^{(1)}(x) + \omega_{nm}^{(2)}(y) X_n^{(2)}(x) \right] Z_m(z) \quad (56)$$

где функции и определяются соответственно формулами §4.1, (25), (25) и (20), является классическим решением задачи DN, то есть удовлетворяет уравнению (1), условию гладкости (2) и условиям (3)-(6).

$$\omega_{0m}(y), \omega_{nm}^{(1)}(y), \omega_{nm}^{(2)}(y), X_n^{(1)}(x), X_n^{(2)}(x) Z_m(z)$$

Доказательство. Сначала убеждаемся, что и при всех (см. (48), (49), (51) и следующее за ними замечание).

$$\text{Используя асимптотику при больших аргументах } \Delta_{nm}^{(1)}(a,b) > 0, \Delta_{nm}^{(2)}(a,b) > 0 \quad \Delta_{0m}(a,b) > 0$$

$$n \in N \cup \{0\}, m \in N$$

$$I_\nu(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (57)$$

и то, что при (для; при соответственно на обеих сторонах), получаем существование констант и таких, что при всех

$$\sqrt{\alpha_{nm}^+} \leq \mu_n \leq \pi n, \sqrt{\alpha_{nm}^-} \leq \sqrt{\lambda_m} \leq \pi m / c \quad n \geq 1 \quad n = 0 \quad \sqrt{\lambda_m} \leq \pi m / c \quad C_0, k > 0 \quad n_0, m_0 \in N$$

$$n \geq n_0, m \geq m_0$$

$$\Delta_{nm}^{(1)}(a, b), \Delta_{nm}^{(2)}(a, b) \geq c_9 e^{k(n+\sqrt{m})}, \Delta_{0m}(a, b) \geq c'_9 e^{k'\sqrt{m}}, \quad (58)$$

$$1/\Delta_{nm}^{(1)}, 1/\Delta_{nm}^{(2)} = O\left(e^{-k(n+\sqrt{m})}\right) \quad 1/\Delta_{0m} = O\left(e^{-k'\sqrt{m}}\right) \quad n, m \rightarrow \infty$$

откуда и при.

Так как с указанными условиями согласования, стандартное интегрирование по частям в (44)-(45) даёт

$$f_1, f_2 \in C^4([-1.1] \times [0, c])$$

$$\left| f_{jnm}^{(k)} \right| \leq \frac{c_{10}}{n^2(1+m)^2}, \left| f_{j0m} \right| \leq \frac{c'_{10}}{(1+m)^2}, \quad j, k = \overline{1, 2}, \quad (59)$$

$$\text{где константы зависят от } c_{10}, c'_{10} \max \left\| \partial^4 f_j \right\|_{C^0}.$$

Комбинируя (58), (59) с ограниченностью и их производных до второго порядка на компактных подмножествах, получаем, что общий член двойного ряда в (56) (вместе с рядами для) мажорируется величиной вида, а общий член одномерного ряда, отвечающего нулевой моде, - величиной; оба ряда сходятся. По признаку Вейерштрасса ряд (56) и все ряды для сходятся абсолютно и равномерно на любом компакте, не пересекающем плоскостей.

Следовательно, почленное дифференцирование ряда законно, и, а также.

$$\bar{\Omega}_j, j = \overline{1, 4} \quad u_{xx}, B_{\beta-1/2}^y u, B_{\gamma-1/2}^z u \quad c_{11} n^2 (1+m)^2 e^{-k(n+\sqrt{m})} \quad c'_{11} (1+m)^2 e^{-k'\sqrt{m}}$$

$$u_x, u_{xx}, B_{\beta-1/2}^y u, B_{\gamma-1/2}^z u \quad x=0, y=0 \quad u \in C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4) \quad u, u_x, z^{2\gamma} u_z \in C(\bar{\Omega})$$

Непрерывность при вытекает из построения функций (условие склейки (11)) и равномерной сходимости ряда вплоть до; непрерывность при следует из свойства (в силу) и. Условие Неймана (3) выполняется, поскольку для всех (см. §3.2). Каждый член ряда по построению удовлетворяет уравнению (1) и условиям (3)-(6), значит, ими

обладает и сумма ряда. Теорема 3 доказана.

$$z^{2\gamma} Z_m(z) \rightarrow 0, z \rightarrow 0 \quad \gamma < 1/2 \quad Z_m(c) = 0 \quad \frac{d}{dx} X_n^{(1)}(\pm 1) = \frac{d}{dx} X_n^{(2)}(\pm 1) = X'_0(\pm 1) = 0 \quad n \in N$$

5.2. Существование решения задачи DN при $\lambda_m < \mu_n^2$

Выражения (54) и (55), входящие в знаменатели формул для коэффициентов при, имеют счётное множество нулей по (при фиксированных), т.е. возникает проблема «малых знаменателей» [22]. Как отмечено в §4.1, нулевая

мода () в этом случае не участвует, поскольку всегда.

Лемма 2. При (для всех, при которых) для функции (53) справедливо представление $n \rightarrow \infty \quad m \quad \lambda_m < \mu_n^2$

$$N_{nm}(t) = \frac{\pi}{\cos(\pi/4 + \beta\pi/2)} \sqrt{\frac{1}{2\pi\mu_n t}} \sin(\mu_n t + \pi/4) + O(n^{-3/2}). \quad (60)$$

Доказательство дословно повторяет доказательство соответствующего утверждения для одномерной части задачи по (ср. вывод асимптотики (55) выше и стандартные асимптотические формулы для при больших [9]): поскольку и подстановка асимптотик в (53) при, и использование тождества приводит к (60), с остатком, вносимым заменой и

ограниченностью производной синуса.

$$y \quad J_\nu(\xi), Y_\nu(\xi) \quad \xi \quad \alpha_{nm}^+ / (-\alpha_{nm}^-) = 1 + O(n^{-2}) \quad \eta_{nm}^- = 1 + O(n^{-2}),$$

$$J_\nu(\xi) \approx \sqrt{2/(\pi\xi)} \cos(\xi - \nu\pi/2 - \pi/4), Y_\nu(\xi) \approx \sqrt{2/(\pi\xi)} \sin(\xi - \nu\pi/2 - \pi/4)$$

$$\xi = \sqrt{-\alpha_{nm}^-} t = \mu_n t + O(n^{-1}), \nu = 1/2 - \beta \frac{1 + \sin \beta \pi}{\cos \beta \pi} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta \pi}{2} \right) O(n^{-3/2}) \quad \xi \rightarrow \mu_n t$$

Лемма 3. Если выполнено одно из условий: 1) любое натуральное число, кроме чисел вида 2) любое дробное число, где то существуют постоянная и номер такие, что для всех и всех, при которых, справедлива оценка $a - 4p - 1, p \in N; a = p/q - (p, q) = 1, (p + q, 4) = 1, p, q \in N, c_{12} > 0, n_1 \in N$

$$n > n_1, m \in N, \lambda_m < \mu_n^2, |N_{nm}(a)| \geq c_{12} n^{-1/2}. \quad (61)$$

Если тем же условиям (с заменой на) удовлетворяет число, то аналогично $a, b, |N_{nm}(b)| \geq c_{13} n^{-1/2}$.

Доказательство. В силу Леммы 2 достаточно оценить снизу. Пользуясь асимптотикой (23), имеем.

$$|\sin(\mu_n a + \pi/4)| \mu_n = \pi/4 + \pi n + O(e^{-2\pi n}), \mu_n a + \frac{\pi}{4} = \pi n a + \frac{\pi}{4}(a + 1) + O(e^{-2\pi n})$$

Пусть. Тогда; это выражение обращается в нуль тогда и только тогда, когда, т.е., – что и объясняет исключение

таких из условия; для остальных правая часть – положительная константа. $a \in N$

$$|\sin(\mu_n a + \pi/4)| \rightarrow \left| \sin \frac{\pi}{4}(a + 1) \right|, a + 1 \equiv 0 \pmod{4}, a = 4p - 1, p \in N, a \in N$$

Пусть Тогда, деля на с остатком,, $a = p/q, (p, q) = 1, np, q, np = sq + r, 0 \leq r < q$

$$\mu_n a + \frac{\pi}{4} = \pi \frac{np}{q} + \frac{\pi}{4} \frac{p + q}{q} + O(e^{-2\pi n}) = \pi s + \frac{\pi r}{q} + \frac{\pi(p + q)}{4q} + O(e^{-2\pi n}),$$

откуда Если (т.е. нечётно), то число нечётно и, в частности, не кратно ни при каком, так что для некоторой постоянной, не зависящей от. Объединяя оба случая с (60), получаем (61). Оценка для доказывается дословно так

$$|\sin(\mu_n a + \pi/4)| = \left| \sin \frac{\pi(4r + p + q)}{4q} \right| + O(e^{-2\pi n}). \quad (p + q, 4) = 1, p + q, 4r + p + q, 4q$$

же.

$$r \in \{0, \dots, q - 1\} \left| \sin \frac{\pi(4r + p + q)}{4q} \right| \geq c_{14} > 0, n, b$$

Лемма 4. Пусть удовлетворяют условию Леммы 3. Тогда существуют и такие, что при всех и всех с: a, b

$$c_{15}, c_{16} > 0, n_2 \in N, n > n_2, m, \lambda_m < \mu_n^2$$

$$\left| \tilde{\Delta}_{nm}^{(1)}(a, b) \right| \geq c_{15} \frac{e^{\mu_n b}}{n}, \left| \tilde{\Delta}_{nm}^{(2)}(a, b) \right| \geq c_{16} \frac{e^{\mu_n a}}{n}. \quad (62)$$

Доказательство. Так как асимптотика (57) даёт, тогда как экспоненциально мало по сравнению с первым слагаемым. Функция и коэффициент ограничены равномерно по. Следовательно, в (54) первое слагаемое по модулю удовлетворяет (в силу оценки (61)), тогда как второе слагаемое есть –экспоненциально меньше первого при. Значит, начиная с некоторого, первое слагаемое доминирует и оценка (62) для верна. Оценка для получается той же выкладкой с перестановкой ролей.

$$\sqrt{\alpha_{nm}^+} \square \mu_n \rightarrow \infty, I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} b \right) \square e^{\mu_n b} / \sqrt{2\pi\mu_n b} K_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} b \right) \square \sqrt{\pi/(2\mu_n b)} e^{-\mu_n b}$$

$$J_{1/2-\beta} \left(\sqrt{-\alpha_{nm}^-} a \right) \eta_{nm}^- = 1 + O(n^{-2}), n, m \left| I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\alpha_{nm}^+} b \right) N_{nm}(a) \right| \geq c_{17} \frac{e^{\mu_n b}}{\sqrt{n}} \frac{c_{12}}{\sqrt{n}} = c_{17} c_{12} \frac{e^{\mu_n b}}{n}$$

$$O(e^{-\mu_n b}), n \rightarrow \infty, n_2, \tilde{\Delta}_{nm}^{(1)}, \tilde{\Delta}_{nm}^{(2)}, a \leftrightarrow b$$

Лемма 5. Пусть функции удовлетворяют по переменной условиям $f_1(x, z), f_2(x, z)$ и

$$f_{jx}(\pm 1, z) = 0, \quad \frac{\partial^k}{\partial x^k} f_j(0-0, z) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} f_j(0+0, z), \quad k = 0, 1, \quad (63)$$

$$f_{jxx}(\pm 1, z) = 0, \quad \frac{\partial^k}{\partial x^k} f_j(0-0, z) = -\frac{\partial^k}{\partial x^k} f_j(0+0, z), \quad k = 2, 3, \quad (64)$$

и по переменной z — условиям

$$\left[B_{\gamma-1/2}^z \right]^k f_j(x, z) \Big|_{z=0} = 0, \quad \left[B_{\gamma-1/2}^z \right]^k f_j(x, z) \Big|_{z=c} = 0, \quad k = \overline{0, 2}, \quad j = \overline{1, 2}, \quad (65)$$

где, а абсолютно интегрируема на при каждом. Тогда для любого фиксированного найдётся такое, что при

достаточно больших $f_j(x, z) \in C_{x,z}^{4,8}([-1, 1] \times [0, c]) \left[B_{\gamma-1/2}^z \right]^3 f_j(x, z) [0, c] \quad \varepsilon \in (0, 1) \quad c_{18} > 0 \quad n, m$

$$\left| f_{jnm}^{(1,2)} \right| \leq \frac{c_{18}}{n^{4+\varepsilon_3} m^{4+\varepsilon_4}}, \quad \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0. \quad (66)$$

Доказательство. Проведём доказательство для для (с функцией) выкладка полностью аналогична. $f_{jnm}^{(1)}; f_{jnm}^{(2)} \tilde{X}_n^{(2)}(x)$

Введём обозначение. Функция определяется формулой (29) и удовлетворяет уравнению, откуда. Подставляя и интегрируя по частям на и на отдельно, замечаем, что внеинтегральные слагаемые при обращаются в нуль автоматически, поскольку, а внеинтегральные слагаемые при взаимно уничтожаются в силу непрерывности и

$$T_{jn}(z) = \int_{-1}^1 f_j(x, z) \tilde{X}_n^{(1)}(x) dx \quad \tilde{X}_n^{(1)}(x)$$

антисимметрии. В результате

$$\operatorname{sgn} x \cdot \frac{d^2}{dx^2} \tilde{X}_n^{(1)}(x) + \mu_n^2 \tilde{X}_n^{(1)}(x) = 0 \quad \tilde{X}_n^{(1)}(x) = -\mu_n^{-2} \operatorname{sgn} x \cdot \frac{d^2}{dx^2} \tilde{X}_n^{(1)}(x) \quad (-1, 0) \quad (0, 1) \quad x = \pm 1$$

$$\frac{d}{dx} \tilde{X}_n^{(1)}(x) \Big|_{\pm 1} = 0 \quad x=0 \quad f_j, \quad f_{jx} \quad \frac{d}{dx} \tilde{X}_n^{(1)}(0 \mp 0) = \mp \frac{d}{dx} \tilde{X}_n^{(1)}(0 \pm 0)$$

$$T_{jn}(z) = \frac{1}{\mu_n^2} \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x \cdot f_{jx}(x, z) \frac{d}{dx} \tilde{X}_n^{(1)}(x) dx.$$

Повторяя интегрирование по частям — теперь внеинтегральные слагаемые при уже не обращаются в нуль автоматически (поскольку), и здесь используется условие из (63), а слагаемые при вновь взаимно уничтожаются в

силу непрерывности и симметрии — получаем $x = \pm 1 \quad \tilde{X}_n^{(1)}(\pm 1) \neq 0 \quad f_{jx}(\pm 1, z) = 0 \quad x=0 \quad f_{jx}, \quad f_{jxx}$

$$\tilde{X}_n^{(1)}(0 \mp 0) = \pm \tilde{X}_n^{(1)}(0 \pm 0),$$

$$T_{jn}(z) = -\frac{1}{\mu_n^2} \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x \cdot f_{jxx}(x, z) \tilde{X}_n^{(1)}(x) dx.$$

$$\tilde{X}_n^{(1)}(x) = -\mu_n^{-2} \operatorname{sgn} x \cdot \frac{d^2}{dx^2} \tilde{X}_n^{(1)}(x) \quad \operatorname{sgn}^2 x = 1$$

Снова используя и:

$$T_{jn}(z) = \frac{1}{\mu_n^4} \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x \cdot f_{jxx}(x, z) \frac{d^2}{dx^2} \tilde{X}_n^{(1)}(x) dx.$$

Ещё дважды интегрируя по частям - на шаге, где вновь оценивается значение (не его производная) при, используется условие из (64), а условия из (63)-(64) обеспечивают взаимное уничтожение слагаемых при , - в итоге

$$\text{имеем } \tilde{X}_n^{(1)}(x) \Big|_{x=\pm 1} f_{jxx}(\pm 1, z) = 0 \quad k = 2, 3 \quad x \neq 0$$

$$T_{jn}(z) = \frac{1}{\mu_n^4} \int_{-1}^1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} f_j(x, z) \tilde{X}_n^{(1)}(x) dx. \quad (67)$$

Далее, функция удовлетворяет. Для произвольной достаточно гладкой с, интегрируя дважды по частям

$$(внеинтегральные слагаемые исчезают: при - из, при из), \quad Z_m(z) = z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sigma_m z/c)$$

$$z^{-2\gamma} \left(z^{2\gamma} Z_m'(z) \right)' = -\lambda_m Z_m(z) \quad h(z) \Big|_{z=0} = h(c) = 0 \quad Z_m(c) = 0 \quad Z_m(0) = 0 - \\ z^{2\gamma} Z_m(z) \rightarrow 0, \gamma < 1/2$$

$$\int_0^c h(z) z^{2\gamma} Z_m(z) dz = -\frac{1}{\lambda_m} \int_0^c z^{2\gamma} Z_m(z) B_{\gamma-1/2}^z h(z) dz. \quad (68)$$

Полагая и применяя (68) трижды подряд (что законно в силу условий (65), гарантирующих – эти условия наследуются от, поскольку действует только по и коммутирует с интегрированием по в определении), получаем

$$h(z) = T_{jn}(z) \left. B_{\gamma-1/2}^z T_{jn}(z) \right|_{z=0,c} = \left[B_{\gamma-1/2}^z \right]^2 T_{jn}(z) \Big|_{z=0,c} = 0 \quad f_j(x, z) B_{\gamma-1/2}^z z^x T_{jn}(z) \\ \int_0^c T_{jn}(z) z^{2\gamma} Z_m(z) dz = -\frac{1}{\lambda_m^3} \int_0^c z^{2\gamma} Z_m(z) \left[B_{\gamma-1/2}^z \right]^3 T_{jn}(z) dz.$$

По лемме Римана-Лебега для рядов Фурье-Бесселя [11]: если абсолютно интегрируема на, то при Применяя это к функции, связанной с (абсолютно интегрируема в силу условия леммы на), заключаем, что интеграл в правой

$$\text{части стремится к нулю при; вместе с это даёт } g(z) \Big|_{[0,c]} \int_0^c z g(z) J_p(\sigma_k z/c) dz \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty \quad (p > -1).$$

$$\left[B_{\gamma-1/2}^z \right]^3 T_{jn}(z) \left[B_{\gamma-1/2}^z \right]^3 f_{jm} \rightarrow \infty \quad \lambda_m^{-3} \square (\pi m/c)^{-6} \\ \left| \int_0^c T_{jn}(z) z^{2\gamma} Z_m(z) dz \right| = O(m^{-4-\varepsilon_4}), \quad \forall \varepsilon_4 \in (0, 2). \quad (69)$$

Из асимптотики нулей и нормировки следует, т.е.. Комбинируя это с (67) и (69): $\sigma_m \square \pi m$

$$\|Z_m\|_{L_{2,q}[0,c]} = |c J_{3/2-\gamma}(\sigma_m)| / \sqrt{2} = O(\sigma_m^{-1/2}) \|Z_m\|^2 = O(m^{-1}) s_m = O(m)$$

$$f_{jnm}^{(1)} = s_m \int_0^c T_{jn}(z) z^{2\gamma} Z_m(z) dz = \frac{O(m)}{\mu_n^4} O(m^{-4-\varepsilon_4}) = O(n^{-4} m^{-3-\varepsilon_4}).$$

Полагая и переобозначая, приходим к требуемой оценке (66). Для выкладка повторяется дословно с вместо.

$$\varepsilon_3 = 0 \quad \varepsilon_4 - 1 = \varepsilon'_4 > 0 \quad f_{jnm}^{(2)} \quad \tilde{X}_n^{(2)}(x) \quad \tilde{X}_n^{(1)}(x)$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия Леммы 5 для, числа удовлетворяют условию Леммы 3, и для всех

рассматриваемых. Тогда сумма ряда $f_1(x, z), f_2(x, z) \quad a, b \quad \lambda_m < \mu_n^2 \quad n, m \in N$

$$u(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{0m}(y) Z_m(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\omega_{nm}^{(1)}(y) X_n^{(1)}(x) + \omega_{nm}^{(2)}(y) X_n^{(2)}(x) \right] Z_m(z) \quad (70)$$

где определяются формулами §4.2, а – формулами §4.1 (нулевая мода принадлежит ветви и потому свободна от проблемы малых знаменателей независимо от соотношения между μ и λ), является классическим решением задачи

$$\text{DN. } \omega_{nm}^{(1)}(y), \omega_{nm}^{(2)}(y) \omega_{0m}(y) \lambda_m > \mu_0^2 \lambda_m \mu_n^2, n \geq 1$$

Доказательство. Функции $\omega_{nm}^{(1)}, \omega_{nm}^{(2)}$ и аналогичные, входящие в формулы для u , при y или равномерно по y ограничены: числитель растёт (по (57)) не быстрее (соответственно) или ограничен, тогда как знаменатель по Лемме 4 не меньше (соответственно); отношение поэтому равномерно ограничено константой, домноженной на ω_{0m} . Комбинируя это с оценкой (66) для $\omega_{nm}^{(1)}, \omega_{nm}^{(2)}$ и их производных до второго порядка на компактах, не пересекающих $y=0$, получаем, что общий член двойного ряда в (70), а также рядов, полученных из него почленным дифференцированием по x до второго порядка,

мажорируется величиной $\tilde{\Delta}_{nm}^{(1)}(a, y) / \tilde{\Delta}_{nm}^{(1)}(a, b) \omega_{nm}^{(1)}(y), \omega_{nm}^{(2)}(y) y \in [0, b] y \in [-a, 0] n, m e^{\mu_n y} e^{\mu_n a}$

$$c_{15} e^{\mu_n b} / n c_{16} e^{\mu_n a} / n n f_{jnm}^{(1,2)} X_n^{(1,2)}(x), Z_m(z) x=0 x, y, z$$

$$c_{19} \frac{n^2 m^2}{n^{4+\varepsilon_3} m^{4+\varepsilon_4}} = \frac{c_{19}}{n^{2+\varepsilon_3} m^{2+\varepsilon_4}},$$

образующей сходящийся двойной числовой ряд; сходимость одномерного ряда по нулевой моде установлена в Теореме 3. По признаку Вейерштрасса ряд (70) и все ряды, полученные из него дифференцированием, сходятся абсолютно и равномерно на любом компакте не пересекающем плоскостей $y=0$. Следовательно, почленное дифференцирование законно, непрерывность на $y=0$ и выполнение условий (3)-(6) устанавливаются так же, как в Теореме 3. Каждый член ряда по построению удовлетворяет уравнению (1), значит, ему удовлетворяет и сумма

$$\text{ряда. Теорема 4 доказана. } K \subset \bar{\Omega}_j, j = \overline{1, 4}, x=0, y=0. u, u_x, z^{2\gamma} u_z \in \bar{\Omega}$$

Теорема 5 (вырожденный случай). Если при указанных в Лемме 3 значениях для некоторых выполняется (или, аналогично, $\omega_{nm}^{(2)}(y) = 0$), то задача DN разрешима тогда и только тогда, когда для соответствующих пар

$$\text{выполнены условия ортогональности } a, b n = k_1, \dots, k_s, m = l_1, \dots, l_s \tilde{\Delta}_{k_i l_i}^{(1)}(a, b) = 0 \tilde{\Delta}_{k_i l_i}^{(2)}(a, b) = 0 (k_i, l_i)$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^1 f_j(x, z) X_{k_i}^{(1)}(x) z^{2\gamma} Z_{l_i}(z) dx dz = 0, j = \overline{1, 2}, i = 1, \dots, s,$$

и решение в этом случае представляется суммой ряда, аналогичного (70), в котором слагаемые с указанными парами заменены на конечную линейную комбинацию соответствующих нетривиальных решений однородной

$$\text{задачи (с произвольными постоянными коэффициентами). } (k_i, l_i)$$

Этим завершено исследование задачи DN.

6. Заключение

В работе исследована граничная задача DN для трёхмерного уравнения смешанного типа с двумя операторами Бесселя и двумя плоскостями смены типа, в которой на плоскостях изменения типа задано условие Неймана. Методом разделения переменных задача сведена к последовательности одномерных спектральных задач; для несамосопряжённой спектральной задачи по x построена сопряжённая (биортогональная) система собственных функций. Установлено, что, в отличие от задачи с условием Дирихле, в спектре задачи DN присутствует дополнительная нулевая мода с постоянной собственной функцией; показано, что отвечающий ей определитель всюду строго положителен, то есть эта мода заведомо свободна от проблемы малых знаменателей. С помощью биортогональной системы доказана единственность решения (Теоремы 1, 2). Проанализирована проблема малых знаменателей для остальных мод, получены оценки снизу соответствующих определителей и установлены достаточные условия на арифметические свойства параметров области, обеспечивающие сходимость

построенных рядов; доказаны теоремы существования решения, включая вырожденный случай (Теоремы 3-5). Полученные результаты дополняют цикл работ по краевым задачам для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами и могут быть перенесены на случай большого числа операторов Бесселя и плоскостей смены типа, а также на смешанные граничные условия.

7. Авторские заявления

Вклад авторов: оба автора внесли равный вклад в постановку задачи, построение и обоснование решения, а также в подготовку текста статьи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование: исследование выполнено без привлечения внешнего финансирования.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. F.G. Tricomi, Equazioni a derivate parziali, Edizioni Cremonese, Rome, 1957.
2. F.I. Frankl, Subsonic flow past a profile with a supersonic zone terminating with a normal compression shock, Prikl. Mat. Mekh. 20 (1956), 196–202.
3. A.V. Bitsadze, Equations of Mixed Type, Pergamon Press, Oxford, 1964.
4. M.M. Smirnov, Equations of Mixed Type, American Mathematical Society, Providence, RI, 1978.
5. M.V. Keldysh, On some cases of degenerate elliptic equations on the boundary of a domain, Dokl. Akad. Nauk SSSR 77 (1951), 181–183.
6. Каримов К.Т., Олимова Д.С. Задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами и с двумя плоскостями изменения типа// Первый конгресс математиков Казахстана. Шымкент, 3-7 апреля 2026 г. –С. 478-480.
7. A. Weinstein, Generalized axially symmetric potential theory, Bull. Amer. Math. Soc. 59 (1953), 20–38.
8. G.N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd ed., Cambridge University Press, 1944.
9. N.N. Lebedev, Special Functions and Their Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1965.
10. B.M. Levitan and I.S. Sargsjan, Sturm-Liouville and Dirac Operators, Mathematics and Its Applications (Soviet Series), vol. 59, Kluwer Academic Publishers (Springer), Dordrecht/Boston/London, 1991.
11. G.P. Tolstov, Fourier Series, Nauka, Moscow, 1980.
12. B.I. Islomov and A.A. Abdullayev, A boundary value problem with a conormal derivative for the mixed type equation of second kind with a conjugation condition of the Frankl type, Russian Mathematics, 2024.
13. A.K. Urinov and K.T. Karimov, Nonlocal boundary value problems for a three-dimensional elliptic equation with singular coefficients in a semi-infinite parallelepiped, Siberian Electronic Mathematical Reports 17 (2020), 161–178.
14. A.K. Urinov and K.T. Karimov, The Dirichlet Problem for a Three-Dimensional Mixed-Type Equation with Three Singular Coefficients, Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences 21 (2017), no. 4, 665–683.
15. A.K. Urinov and K.T. Karimov, Dirichlet Problem for an Elliptic Equation with Three Singular Coefficients, J. Math. Sci. 254 (2021), 731–742.
16. A.K. Urinov and K.T. Karimov, The Dirichlet Problem for an Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Semi-Cylindrical Domain, Lobachevskii J. Math. 41 (2020), 1898–1909.
17. E. Karimov, M. Ruzhansky, and B. Toshtemirov, Solvability of the boundary-value problem for a mixed equation involving hyper-Bessel fractional differential operator and bi-ordinal Hilfer fractional derivative, Math. Meth. Appl. Sci., 2023.
18. K.T. Karimov, Keldysh problem for a three-dimensional equation of mixed type with three singular coefficients, Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki 30 (2020), no. 1, 31-48.
19. A.K. Urinov and K.T. Karimov, The Dirichlet Problem for an Elliptic Equation with Three Singular Coefficients and Negative Parameters, J. Math. Sci. 274 (2023), 285-300.
20. A.A. Gimaltdinova, The Dirichlet Problem for a Mixed-Type Equation with Two Transition Lines in a Rectangular Domain, Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences, no. 4 (2017), 634-649.
21. A.A. Gimaltdinova, The Second Boundary Value Problem for the Lavrentiev–Bitsadze Equation with Two Type-Changing Lines in a Rectangular Domain, Itogi Nauki i Tekhniki, Ser. “Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory” 137 (2017), 3-16.
22. V.I. Arnold, Small Denominators and Problems of Stability of Motion in Classical and Celestial Mechanics, Russian Mathematical Surveys 18 (1963), no. 6, 85-191.
23. I.A. Kipriyanov, Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi, Nauka, Moscow, 1997.

References

1. F.G. Tricomi, *Equazioni a derivate parziali*, Edizioni Cremonese, Rome, 1957.
2. F.I. Frankl, Subsonic flow past a profile with a supersonic zone terminating with a normal compression shock, *Prikl. Mat. Mekh.* 20 (1956), 196-202.
3. A.V. Bitsadze, *Equations of Mixed Type*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
4. M.M. Smirnov, *Equations of Mixed Type*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1978.
5. M.V. Keldysh, On some cases of degenerate elliptic equations on the boundary of a domain, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 77 (1951), 181-183.
6. Karimov, K.T., Olimova, D.S.: The Dirichlet problem for a three-dimensional mixed-type equation with two singular coefficients and two type-changing planes. In: *First Congress of Mathematicians of Kazakhstan*, Shymkent, April 3-7, 2026, pp. 478-480.
7. A. Weinstein, Generalized axially symmetric potential theory, *Bull. Amer. Math. Soc.* 59 (1953), 20-38.
8. G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1944.
9. N.N. Lebedev, *Special Functions and Their Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1965.
10. B.M. Levitan and I.S. Sargsjan, *Sturm-Liouville and Dirac Operators, Mathematics and Its Applications (Soviet Series)*, vol. 59, Kluwer Academic Publishers (Springer), Dordrecht/Boston/London, 1991.
11. G.P. Tolstov, *Fourier Series*, Nauka, Moscow, 1980.
12. B.I. Islomov and A.A. Abdullayev, A boundary value problem with a conormal derivative for the mixed type equation of second kind with a conjugation condition of the Frankl type, *Russian Mathematics*, 2024.
13. A.K. Urinov and K.T. Karimov, Nonlocal boundary value problems for a three-dimensional elliptic equation with singular coefficients in a semi-infinite parallelepiped, *Siberian Electronic Mathematical Reports* 17 (2020), 161-178.
14. A.K. Urinov and K.T. Karimov, The Dirichlet Problem for a Three-Dimensional Mixed-Type Equation with Three Singular Coefficients, *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences* 21 (2017), no. 4, 665-683.
15. A.K. Urinov and K.T. Karimov, Dirichlet Problem for an Elliptic Equation with Three Singular Coefficients, *J. Math. Sci.* 254 (2021), 731-742.
16. A.K. Urinov and K.T. Karimov, The Dirichlet Problem for an Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Semi-Cylindrical Domain, *Lobachevskii J. Math.* 41 (2020), 1898-1909.
17. E. Karimov, M. Ruzhansky, and B. Toshtemirov, Solvability of the boundary-value problem for a mixed equation involving hyper-Bessel fractional differential operator and bi-ordinal Hilfer fractional derivative, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2023.
18. K.T. Karimov, Keldysh problem for a three-dimensional equation of mixed type with three singular coefficients, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki* 30 (2020), no. 1, 31-48.
19. A.K. Urinov and K.T. Karimov, The Dirichlet Problem for an Elliptic Equation with Three Singular Coefficients and Negative Parameters, *J. Math. Sci.* 274 (2023), 285-300.
20. A.A. Gimaltdinova, The Dirichlet Problem for a Mixed-Type Equation with Two Transition Lines in a Rectangular Domain, *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, no. 4 (2017), 634-649.
21. A.A. Gimaltdinova, The Second Boundary Value Problem for the Lavrentiev-Bitsadze Equation with Two Type-Changing Lines in a Rectangular Domain, *Itogi Nauki i Tekhniki, Ser. "Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory"* 137 (2017), 3-16.
22. V.I. Arnold, Small Denominators and Problems of Stability of Motion in Classical and Celestial Mechanics, *Russian Mathematical Surveys* 18 (1963), no. 6, 85-191.
23. I.A. Kipriyanov, *Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi*, Nauka, Moscow, 1997.