

NAMANGAN DAVLAT
UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI, [2026-9]
ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427



01.00.00-FIZIKA-MATEMATIKA
journal.namdu.uz
PHYSICS AND MATHEMATICS

TOR TEBRANISH TENGLAMASI UCHUN INTEGRAL SHARTLI TESKARI MASALA

Usmonov Doniyor Abdumutolib o' g' li

Farg' ona davlat universiteti, fizika-matematika
fanlari bo' yicha falsafa doktori, katta o' qituvchi

ORCID ID: 0000-0002-3574-075X

e-mail: dusmonov909@gmail.com

G' afforova Nafisa Xanifovna

Farg' ona davlat universiteti akademik
litseyi, o' qituvchisi

Annotatsiya: Ushbu maqolada bir o' lchamli bir jinsli bo' l imagan tor tebranish (to' lqin) tenglamasi uchun integral shartli teskari masala o' rganilgan. Masalada ikki noma'lum funksiya yechim va o' ng tomondagi faqat vaqtga bog' liq manba funksiyasi - birgalikda aniqlanishi talab qilinadi; ular xarakteristik chiziqlar bilan chegaralangan sohada giperbolik tenglama, boshlang' ich shart, nolokal integral shart hamda xarakteristika bo' ylab berilgan qo' shimcha shart orqali izlanadi. Yechimni qurishda D'alamber formulasidan foydalanilib, noma'lum boshlang' ich funksiya ikkinchi tur Volterra integral tenglamasiga keltiriladi, manba funksiyasi esa ketma-ket differensiallash orqali topiladi. Berilgan ma'lumotlar orasidagi moslik shartlari aniqlanib, ular asosida masala yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan hamda noma'lum funksiyalarning oshkor analitik ifodalari olingan. Nazariy natijalar ko' phadli va trigonometrik ma'lumotlar bilan berilgan aniq misollar hamda grafiklar yordamida tasdiqlangan. Olingan natijalar matematik fizikaning teskari masalalari nazariyasini rivojlantirishda va tebranish jarayonlarini modellashtirishda muhim ahamiyatga ega.

Kalit so' zlar: to' lqin tenglamasi, teskari masala, qo' shimcha shart, D'alamber formulasi, mavjudlik va yagonalik, bir jinsli bolmagan tenglama.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Аннотация: В данной статье исследуется обратная задача с интегральным условием для одномерного неоднородного уравнения колебаний струны (волнового уравнения). В задаче требуется совместно определить две неизвестные функции решение и зависящий только от времени источник в правой части; они находятся в области, ограниченной характеристическими линиями, из гиперболического уравнения, начального условия, нелокального интегрального условия, а также дополнительного условия, заданного вдоль характеристики. При построении решения используется формула Даламбера, неизвестная начальная функция сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, а функция источника находится последовательным дифференцированием. Определены условия согласования исходных данных, на основе которых доказаны существование и единственность решения и получены явные аналитические выражения для неизвестных функций. Теоретические результаты подтверждены конкретными примерами с полиномиальными и тригонометрическими данными и графиками. Полученные результаты важны для развития теории обратных задач математической физики и моделирования колебательных процессов.

Ключевые слова: волновое уравнение, обратная задача, дополнительное условие, формула Даламбера, существование и единственность, неоднородное уравнение.

AN INVERSE PROBLEM FOR THE STRING VIBRATION EQUATION WITH AN INTEGRAL CONDITION

Abstract: This paper studies an inverse problem with an integral condition for the one-dimensional inhomogeneous string vibration (wave) equation. The problem requires the simultaneous determination of two unknown functions the solution and a time-dependent source term on the right-hand side; they are sought in a domain bounded by characteristic lines from a hyperbolic equation, an initial condition, a nonlocal integral condition, and an additional condition prescribed along a characteristic. The solution is constructed using d'Alembert's formula, the unknown initial function is reduced to a Volterra integral equation of the second kind, and the source function is found by successive differentiation. Compatibility conditions for the given data are established, on the basis of which the existence and uniqueness of the solution are proved and explicit analytical expressions for the unknown functions are obtained. The theoretical results are confirmed by concrete examples with polynomial and trigonometric data and by graphs. The

obtained results are important for the development of the theory of inverse problems of mathematical physics and for modeling vibration processes.

Keywords: wave equation, inverse problem, additional condition, A'dlembert formula, existence and uniqueness, inhomogeneous equation.

Kirish

Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun teskari masalalar nazariyasi bugungi kunda matematik fizikaning eng jadal rivojlanayotgan yo'nalishlaridan biri hisoblanadi [1], [2]. To'g'ri (klassik) masalalarda tenglamaning koeffitsiyentlari, manba funksiyasi hamda boshlang'ich va chegaraviy shartlar oldindan ma'lum bo'lib, jarayonning kechishi izlanadi. Teskari masalalarda esa, aksincha, jarayonni yuzaga keltiruvchi noma'lum omillar-manba funksiyasi, tenglama koeffitsiyentlari yoki chegaraviy rejim-jarayon haqidagi bilvosita (qo'shimcha) o'lchov ma'lumotlari asosida tiklanadi [4], [5]. Aynan shu xususiyat teskari masalalarni amaliy jihatdan nihoyatda dolzarb qiladi: ko'pgina real masalalarda tashqi ta'sir yoki manbani bevosita o'lchash imkoni bo'lmaydi va uni faqat kuzatuv natijalari orqali baholashga to'g'ri keladi.

To'liq (giperbolik) tenglamalar uchun teskari masalalar bu boradagi eng muhim sinflardan biridir. Bunday masalalar akustika va tebranishlar nazariyasida noma'lum tovush manbasini aniqlashda, seysmik qidiruv hamda geofizikada yer osti tuzilmalarini o'rganishda, elastiklik nazariyasi va konstruksiyalar diagnostikasida, nurlanmas (nondestruktiv) nazorat, tibbiy ultratovush tomografiyasi va signallarni qayta ishlashda keng qo'llaniladi [4], [5]. Bu masalalarning umumiy mohiyati - kuzatilayotgan tebranish maydoni bo'yicha uni yuzaga keltirgan noma'lum manba yoki tashqi ta'sirni tiklashdan iborat bo'lib, aynan shu jihat mavzuning amaliy ahamiyatini belgilaydi.

Teskari masalalar, qoida tariqasida, nokorrekt (ill-posed) masalalar sinfiga kiradi; shuning uchun ularning yechimi mavjudligi, yagonaligi va barqarorligi masalalari alohida qat'iy talab qiladi [1], [2]. Yechimning yagonaligini ta'minlash maqsadida masalaga qo'shimcha (ortiqcha aniqlovchi) shart kiritiladi. Amaliyotda o'lchov natijalari ko'pincha nuqtaviy emas, balki o'rtacha (integral) kattaliklar ko'rinishida qayd etilgani sababli, qo'shimcha shartni integral ko'rinishda berish tabiiy va amaliy jihatdan asoslangan yondashuv hisoblanadi. So'nggi yillarda giperbolik tenglamalar uchun integral va nolokal shartli teskari masalalar bir qator mualliflar tomonidan faol o'rganilmoqda [10], [11], [12]. Shu bilan birga, manba funksiyasi faqat vaqt o'zgaruvchisiga bog'liq bo'lgan va soha xarakteristik chiziqlar bilan chegaralangan holatda yechimni Dalamber formulasi asosida oshkor ko'rinishda qurish masalasi hozircha yetarlicha o'rganilmagan.

Mazkur ishda o'ng tomonida faqat vaqt o'zgaruvchisiga bog'liq noma'lum funksiya qatnashgan bir o'lchamli bir jinsli bo'lmagan to'liq tenglamasi uchun teskari masala ko'rib chiqiladi. Masala xarakteristik chiziqlar bilan chegaralangan sohada qo'yilib, boshlang'ich shartga qo'shimcha ravishda integral shart va qo'shimcha shart beriladi. Ushbu shartlar yordamida noma'lum manba funksiyasini aniqlash imkoniyati yaratiladi. Maqolaning asosiy maqsadi-masalaning aniq yechimini qurish, noma'lum funksiya uchun oshkor ifodani olish hamda yechimning mavjudligi va yagonaligini ta'minlovchi shartlarni aniqlashdan iborat.

Ishning oldingi tadqiqotlardan asosiy farqi va ilmiy yangiligi shundaki, bu yerda uchta xususiyat bir masalada birlashtiriladi: tebranishning boshlang'ich holati odatdagi lokal boshlang'ich shart o'rniga λ parametrlil nolokal integral shart (2) orqali beriladi; yechim yagonaligini ta'minlovchi qo'shimcha (ortiqcha aniqlovchi) shart (4) soha xarakteristikasi bo'ylab qo'yiladi; masalaning o'zi esa xarakteristik chiziqlar bilan chegaralangan sohada qaraladi. Bunday qo'yilishda noma'lum boshlang'ich funksiya ikkinchi tur Volterra integral tenglamasidan tiklanadi. Eng muhimi, [10], [11], [12] kabi ishlarda teskari masala ko'pincha Fyurje usuli yoki funksional baholashlar yordamida faqat mavjudlik va yagonalik

nuqtai nazaridan yoxud sonli usullar bilan taqriban o'rganilgan bo'lsa, mazkur ishda $\{U(x, t), f(t)\}$ noma'lum funksiyalar juftligi Dalamber formulasi va ketma-ket differensiallash yordamida oshkor (analitik) ko'rinishda quriladi, shuningdek berilgan $a(x)$, $v(x)$ va $\varphi(t)$ ma'lumotlar orasidagi moslik shartlari aniq ko'rsatiladi. Ana shu oshkor tiklash imkoniyati va shartlarning aniq bog'lanishi ishning asosiy yangiligini tashkil etadi.

Adabiyotlar tahlili

Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun teskari masalalar nazariyasi matematik fizikaning muhim yo'nalishlaridan biri bo'lib, bunday masalalar ko'pincha noma'lum tashqi ta'sirlar yoki manba funksiyalarini aniqlash zarurati bilan bog'liq bo'ladi [3], [4]. Ayniqsa, to'liq tenglamasi uchun teskari masalalar akustika, elastiklik nazariyasi va signallarni qayta ishlash sohalarida keng qo'llaniladi [5].

To'liq tenglamasi uchun to'g'ri masalalar klassik manbalarda batafsil o'rganilgan [6], [7]. Dalamber formulasi bir o'lchamli to'liq tenglamasining boshlang'ich masalasini yechishda asosiy vosita hisoblanadi va ko'plab monografiyalarda keltirilgan [7], [9]. Ushbu yondashuv yordamida yechimni aniq ko'rinishda ifodalash imkoniyati mavjud.

Teskari masalalar nazariyasining umumiy asoslari A.N. Tixonov, V.Y. Arsenin, M.M. Lavrentyev va ularning izdoshlari ishlarida ishlab chiqilgan [1], [2]. Ularning tadqiqotlarida teskari masalalarning noaniqligi, yechimlarning barqarorligi hamda mavjudlik va yagonalik masalalari chuqur tahlil qilingan. Ushbu ishlarda qo' shimcha shartlar kiritish orqali noma'lum funksiyalarni aniqlash usullari taklif etilgan. Bunday masalalarni sonli yechishning samarali usullari ham ishlab chiqilgan [8].

To' lqin tenglamasi uchun manba funksiyasini aniqlashga doir masalalar bir qator mualliflar tomonidan o' rganilgan [3], [4], [10]. Ayrim ishlarda manba funksiyasi fazo va vaqtga bog' liq holda qaralgan bo' lsa, boshqa tadqiqotlarda u faqat vaqt yoki faqat fazoga bog' liq deb olinadi. Xususan, faqat vaqtga bog' liq manba funksiyasini aniqlash masalalari integral tenglamalarga keltirilib, ularni differensiallash orqali aniq yechimlar olish mumkinligi ko' rsatilgan [11].

So' nggi yillarda xarakteristik chiziqlar bilan chegaralangan sohalarda hamda integral va nolokal shartlar bilan qo' yilgan teskari masalalarga ham e'tibor kuchaymoqda [11], [12]. Bunday yondashuv qo' shimcha shartlarni tabiiy ravishda kiritish imkonini beradi va masalaning yechimining yagonaligini ta'minlashda muhim rol o' ynaydi.

Mazkur maqolada keltirilgan yondashuv yuqoridagi ishlarning mantiqiy davomi bo' lib, u qo' shimcha shart yordamida to' lqin tenglamasidagi noma'lum vaqtga bog' liq manba funksiyasini aniq ko' rinishda tiklash imkonini beradi. Olingan natijalar klassik nazariyaga mos keladi va teskari masalalar bo' yicha mavjud natijalarni to' ldiradi [4], [5].

Asosiy natija

$t = 0, t = x$ va chiziqlar bilan chegaralangan sohani D bilan belgilaylik. D sohada ushbu $t = 1 - x$

$$U_{tt} - U_{xx} = f(t) \quad (1)$$

tenglamani qaraylik, bu yerda $U(x, t), f(t)$ - noma'lum funksiyalar.

T masala. sinfdagi, (1) tenglama va $U(x, t) \in C(\overline{D}), U_{xx}, U_{tt} \in C(D), f(t) \in C\left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$U(x, 0) + \lambda \int_0^x U(\xi, 0) d\xi = a(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$U_t(x, 0) = v(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

integral va boshlang' ich hamda

$$U(t, t) = \varphi(t) \quad (4)$$

qo' shimcha shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyalar juftligi topilsin, bu yerda -berilgan funksiyalar bo' lib, shartni

bajaradi, - berilgan haqiqiy son. $\{U(x, t), f(t)\} a(x), v(x), \varphi(t) a(0) = \varphi(0) \lambda$

Daslab, belgilashni kiritaylik. $U(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1$

(1), (3) va shartlarni qanoatlantiruvchi yechim quyidagi $U(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1$

$$U(x, t) = \frac{\tau(x-t) + \tau(x+t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v(z) dz + \frac{1}{2} \int_0^t d\eta \int_{x=(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\eta) d\xi$$

bo' ladi. Buni soddalashtirsak,

$$U(x, t) = \frac{\tau(x-t) + \tau(x+t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v(z) dz + \int_0^t (t-\eta) f(\eta) d\eta \quad (5)$$

tenglikni olamiz.

(5) ni (4) ga bo' ysundirib,

$$\frac{\tau(0) + \tau(2t)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{2t} v(z) dz + \int_0^t (t-\eta) f(\eta) d\eta = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglamani

$$\int_0^t (t-\eta) f(\eta) d\eta = \varphi(t) - \frac{\tau(0) + \tau(2t)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{2t} \nu(z) dz$$

ko' rinishda yozib olamiz.

Bu tenglamani bir marta differensiallab,

$$\int_0^t f(\eta) d\eta = \varphi'(t) - \tau'(2t) - \nu(2t) \quad (6)$$

Tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani o' ng tomoni da nol bo' lgani uchun $t = 0$

$$\varphi'(0) - \tau'(0) - \nu(0) = 0$$

yoki

$$\varphi'(0) = \tau'(0) + \nu(0)$$

bo' lishi kerak.

Endi (6) ni ham bir marta differensiallab, funksiyani $f(t)$

$$f(t) = \varphi''(t) - 2\tau''(2t) - 2\nu'(2t) \quad (7)$$

$$f(t) \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \varphi(t) \in C^2\left[0, \frac{1}{2}\right], \tau(x) \in C^2[0,1],$$

ko' rinishda topamiz. bo' lishi uchun bo' lishi kerak.

$$\nu(x) \in C^1[0,1]$$

Endi funksiyani topamiz. Buning uchun belgilashdan va (2) shartdan foydalanib, $\tau(x)$

$$U(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\tau(x) + \lambda \int_0^x \tau(\xi) d\xi = a(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

integral tenglamani hosil qilamiz.

Bu integral tenglama ikkinchi tur Volterra integral tenglamani bo' lgani uchun uni ketma-ket yaqinlashishlar usuli bilan yechish mumkin.

Ko' rsatish qiyin emasni uning yechimi

$$\tau(x) = a(x) - \lambda \int_0^x e^{-\lambda(x-\xi)} a(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (8)$$

ko' rinishda bo' ladi.

(8) ni (5) va (7) larga qo' yib,, ni quyidagi ko' rinishda topamiz: $U(x, t) f(t)$

$$U(x, t) = \frac{a(x-t) + a(x+t)}{2} - \frac{\lambda}{2} \int_0^{x-t} e^{-\lambda(x-t-\xi)} a(\xi) d\xi - \frac{\lambda}{2} \int_0^{x+t} e^{-\lambda(x+t-\xi)} a(\xi) d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \nu(z) dz + \int_0^t (t-\eta) f(\eta) d\eta \quad (9)$$

$$f(t) = \varphi''(t) - 2\nu'(2t) - 2a''(2t) +$$

$$+ 2\lambda a'(2t) - 2\lambda^2 a(2t) + 2\lambda^3 \int_0^x e^{-\lambda(x-\xi)} a(\xi) d\xi \quad (10)$$

Teorema. Agar,, shartlar bajarilsa, u holda T masalaning yechimi mavjud va yagona bo' lib, u (9) va (10)

tengliklar bilan aniqlanadi.

$$\varphi(t) \in C^2\left[0, \frac{1}{2}\right], \quad a(x) \in C^2[0,1], \quad \nu(x) \in C^1[0,1] \quad \varphi(0) = a(0)$$

$$\varphi'(0) = a'(0) - \lambda a(0) + \nu(0)$$

Aniq misollar

Bayon etilgan masalani aniq misol yordamida ko'rsatamiz

1-misol. deb olamiz va berilgan funksiyalarni quyidagi aniq ko'rinishda bo'lsin: $\lambda = 1$

$$a(x) = x + \frac{x^2}{2}, \quad v(x) = 1, \quad \varphi(t) = 2t + t^2.$$

Avvalo, moslik shartlarini tekshiramiz:

$$\varphi(0) = a(0) = 0, \quad \varphi'(0) = a'(0) - \lambda a(0) + v(0) = 1 - 0 + 1 = 2.$$

(8) formula bo'yicha funksiyani tiklaymiz. Ichki integralni hisoblab, $\tau(x)$

$$\int_0^x e^{-(x-\xi)} \left(\xi + \frac{\xi^2}{2} \right) d\xi = e^{-x} \int_0^x e^{\xi} \left(\xi + \frac{\xi^2}{2} \right) d\xi = \frac{x^2}{2},$$

$$\tau(x) = a(x) - \lambda \int_0^x e^{-\lambda(x-\xi)} a(\xi) d\xi = \left(x + \frac{x^2}{2} \right) - \frac{x^2}{2} = x$$

hosil qilamiz. (7) formula orqali ni topamiz: $f(t)$

$$f(t) = \varphi''(t) - 2\tau''(2t) - 2v'(2t) = 2 - 0 - 0 = 2.$$

Nihoyat, (5) formula bo'yicha yechimni quramiz:

$$U(x, t) = \frac{\tau(x-t) + \tau(x+t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v(z) dz + \int_0^t (t-\eta) f(\eta) d\eta = x + t + t^2.$$

Topilgan juftligi masalaning barcha shartlarini qanoatlantiradi: $\{U(x, t), f(t)\} = \{x + t + t^2, 2\}$

$$U_{tt} - U_{xx} = 2 = f(t), \quad U_t(x, 0) = 1 = v(x), \quad U(t, t) = 2t + t^2 = \varphi(t),$$

$$U(x, 0) + \lambda \int_0^x U(\xi, 0) d\xi = x + \int_0^x \xi d\xi = x + \frac{x^2}{2} = a(x).$$

Quyidagi topigan funksiyalarni tasvirlari keltirilgan:

2-misol. Endi bo'lgan holda, **trigonometrik funksiyalar bilan misol keltiramiz.** deb olamiz va $\lambda \neq 1$ $\lambda = 2$

$$a(x) = \cos x + 2 \sin x, \quad v(x) = 0, \quad \varphi(t) = \cos^2 t - \cos t + 1$$

funksiyalarni tanlaymiz. Moslik shartlari bajariladi:

$$\varphi(0) = a(0) = 1, \quad \varphi'(0) = a'(0) - \lambda a(0) + v(0) = 2 - 2 + 0 = 0.$$

(8) formula bo'yicha ni tiklaymiz. Volterra yadrosi bilan integralni hisoblaganda $\tau(x)$

$$\int_0^x e^{-2(x-\xi)} (\cos \xi + 2 \sin \xi) d\xi = e^{-2x} \left[e^{2\xi} \sin \xi \right]_0^x = \sin x$$

bo'lgani uchun

$$\tau(x) = a(x) - 2 \int_0^x e^{-2(x-\xi)} (\cos \xi + 2 \sin \xi) d\xi = (\cos x + 2 \sin x) - 2 \sin x = \cos x.$$

(7) formula orqali manba funksiyasini topamiz:

$$f(t) = \varphi''(t) - 2\tau''(2t) - 2v'(2t) = (-2 \cos 2t + \cos t) + 2 \cos 2t = \cos t.$$

(5) formulada

$$\int_0^t (t-\eta) \cos \eta d\eta = 1 - \cos t$$

ekanligidan foydalanib,

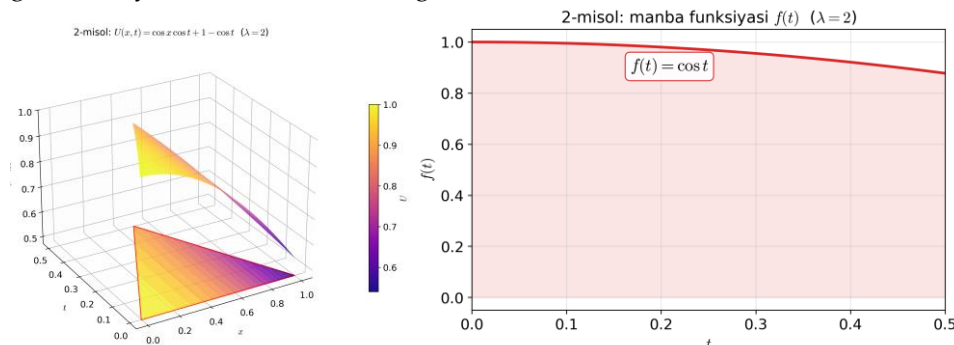
$$U(x, t) = \frac{\cos(x-t) + \cos(x+t)}{2} + \int_0^t (t-\eta) f(\eta) d\eta = \cos x \cos t + 1 - \cos t$$

yechimni olamiz. Bu yechim ham barcha shartlarni qanoatlantiradi:

$$U_{tt} - U_{xx} = \cos t = f(t), \quad U_t(x, 0) = 0 = v(x), \quad U(t, t) = \cos^2 t - \cos t + 1 = \varphi(t),$$

$$U(x, 0) + \lambda \int_0^x U(\xi, 0) d\xi = \cos x + 2 \sin x = a(x).$$

Quyidagi topigan funksiyalarni tasvirlari keltirilgan:



Xulosa

Maqolada bir o' lchamli bir jinsli bolmagan to' lqin tenglamasi uchun qo' shimcha shartli teskari masala ko' rib chiqildi. Dalamber formulasi asosida to' g' ri masalaning umumiy yechimi qurildi va qo' shimcha shart yordamida noma' lum manba funksiyasi uchun integral tenglama hosil qilindi. Ushbu tenglama ketma-ket differentsiallashtirish orqali ochiq ko' rinishda aniqlanib, noma' lum funksiya ifodasi topildi.

Shuningdek, berilgan boshlang' ich va qo' shimcha shartlar o' rtasidagi moslik shartlari aniqlanib, ular bajarilganda teskari masalaning yechimi mavjud va yagona ekanligi isbotlandi. Olingan natijalar to' lqin jarayonlarida tashqi ta' sirlarni aniqlash bilan bog' liq masalalarni yechishda qo' llanilishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишацкий С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
3. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 264 с.
4. Исаков В. Обратные задачи для уравнений с частными производными. М.: Физматлит, 2007. 352 с.
5. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Теория и приложения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2009. 457 с.
6. Джон Ф. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1985. 446 с.
7. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М.: Наука, 1967. 832 с.
8. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 480 с.
9. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными. М.: МЦНМО, 2010. 448 с.
10. Pulkina L.S. A nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equation // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 2011. Vol. 2, No. 4. P. 61–70.
11. Oussaeif T.-E., Bouziani A. Inverse problem of a hyperbolic equation with an integral overdetermination condition // Electronic Journal of Differential Equations. 2016. Vol. 2016, No. 138. P. 1–7.
12. Bağlan İ., Yernazar A., Aslan E., Budak H., Vivas-Cortez M. Analysis of inverse problem for pseudo-hyperbolic equation under periodic boundary condition // Scientific Reports. 2025. Vol. 15. Art. no. 41218.

References

1. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. Metody resheniya nekorrektnykh zadach. Moscow, Nauka, 1979. 288 p.
2. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. Nekorrektnye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza. Moscow, Nauka, 1980. 286 p.
3. Romanov V.G. Obratnye zadachi matematicheskoi fiziki. Moscow, Nauka, 1984. 264 p.
4. Isakov V. Obratnye zadachi dlya uravnenii s chastnymi proizvodnymi. Moscow, Fizmatlit, 2007. 352 p.
5. Kabanikhin S.I. Obratnye i nekorrektnye zadachi. Teoriya i prilozheniya. Novosibirsk, Izd-vo SO RAN, 2009. 457 p.
6. Dzhon F. Uravneniya s chastnymi proizvodnymi. Moscow, Mir, 1985. 446 p.
7. Kurant R., Gil'bert D. Metody matematicheskoi fiziki. Vol. 2. Moscow, Nauka, 1967. 832 p.

8. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Chislennyye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoi fiziki. Moscow, Editorial URSS, 2004. 480 p.
9. Evans L.C. Uravneniya s chastnymi proizvodnymi. Moscow, MTsNMO, 2010. 448 p.
10. Pulkina L.S. A nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equation // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 2011. Vol. 2, No. 4. P. 61–70.
11. Oussaeif T.-E., Bouziani A. Inverse problem of a hyperbolic equation with an integral overdetermination condition // Electronic Journal of Differential Equations. 2016. Vol. 2016, No. 138. P. 1–7.
12. Bağlan İ., Yernazar A., Aslan E., Budak H., Vivas-Cortez M. Analysis of inverse problem for pseudo-hyperbolic equation under periodic boundary condition // Scientific Reports. 2025. Vol. 15. Art. no. 41218.