NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI, [2026-9]
ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427

01.00.00-FIZIKA-MATEMATIKA
journal.namdu.uz
PHYSICS AND MATHEMATICS

ПОСТРОЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКАХ И МНОГОУГОЛЬНИКАХ С НЕДОСТУПНЫМИ ВЕРШИНАМИ

Абдусаломова Сарвиноз Сохибжоновна
Студентка группы 101/24 направления «Математика»
Факультет точных наук и инженерии
Кокандский государственный университет
Научный руководитель:
Эсонов Мунавваржон Мукимжонович
PhD,старший преподаватель
Кафедраматематики Кокандский государственный университет

Аннотация: *В статье рассматриваются классические задачи на геометрические построения, в которых одна или несколько вершин треугольника или многоугольника недоступны для непосредственной работы циркулем и линейкой. Подобные ситуации возникают при практических измерениях на местности, в геодезии и топографии, когда нужная точка расположена за пределами рабочего поля чертежа или закрыта препятствием. На основе материала книги П. Цюльке показаны общие приёмы, позволяющие свести задачу с недоступной вершиной к задаче с обычным треугольником: применение вспомогательных параллельных прямых, окружности девяти точек, центров подобия. Приводятся построения середины стороны, вписанной и описанной окружностей, а также высот треугольника с недоступными вершинами.*

Ключевые слова: *геометрические построения, недоступная вершина, циркуль и линейка, треугольник, многоугольник, окружность Фейербаха, центр подобия, параллельные прямые, практическая геометрия.*

UCHBURCHAK VA KO‘ PBURCHAKLARDA NOQULAY (ERISHIB BO‘ LMAYDIGAN) UCHLAR BILAN YASASHLAR

Annotatsiya: *Maqolada uchburchak yoki ko‘ pburchakning bir yoki bir nechta uchi sirkul va chizg‘ ich bilan bevosita ishlash uchun erishib bo‘ lmaydigan holatdagi klassik yasash masalalari ko‘ rib chiqiladi. Bunday vaziyatlar yer yuzasida amaliy o‘ lchash ishlarida, geodeziya va topografiyada — kerakli nuqta chizma ish maydonidan tashqarida joylashganda yoki to‘ siq bilan berkitilganda yuzaga keladi. P. Sulke kitobi materiali asosida erishib bo‘ lmaydigan uchli masalani oddiy uchburchak masalasiga keltiruvchi umumiy usullar ko‘ rsatilgan: yordamchi parallel to‘ g‘ ri chiziqlar, to‘ qqiz nuqta aylanasi va o‘ xshashlik markazlarini qo‘ llash. Erishib bo‘ lmaydigan uchlarga ega uchburchakning tomon o‘ rtasi, ichki va tashqi chizilgan aylanalari, shuningdek balandliklarini yasash keltirilgan.*

Kalit so‘ zlar: *geometrik yasashlar, erishib bo‘ lmaydigan uch, sirkul va chizg‘ ich, uchburchak, ko‘ pburchak, Feyerbax aylanasi, o‘ xshashlik markazi, parallel to‘ g‘ ri chiziqlar, amaliy geometriya.*

CONSTRUCTIONS IN TRIANGLES AND POLYGONS WITH INACCESSIBLE VERTICES

Abstract: *The article considers classical geometric construction problems in which one or several vertices of a triangle or polygon are inaccessible for direct work with compass and straightedge. Such situations arise in practical field measurements, in geodesy and topography, when the required point lies outside the working area of the drawing or is obscured by an obstacle. Based on the material of P. Zuhlke’s book, general techniques are shown that reduce a problem with an inaccessible vertex to a problem with an ordinary triangle: the use of auxiliary parallel lines, the nine-point circle and centres of similitude. Constructions of the midpoint of a side, of the inscribed and circumscribed circles, and of the altitudes of a triangle with inaccessible vertices are presented.*

Keywords: *geometric constructions, inaccessible vertex, compass and straightedge, triangle, polygon, Feuerbach circle, centre of similitude, parallel lines, practical geometry.*

«Геометрия — это искусство хорошо рассуждать на плохо выполненных чертежах» (А. Пуанкаре)

Введение

Школьный курс геометрии приучает нас к тому, что все вершины фигур, с которыми мы работаем, аккуратно лежат на листе бумаги и до каждой из них легко дотянуться циркулем. На практике дело обстоит иначе. Геодезист, делающий съёмку местности, нередко сталкивается с тем, что вершина треугольника, образованного тремя ориентирами, оказывается за оврагом, на крыше здания или вовсе за рамками планшета. Линейка и циркуль формально остаются единственными инструментами построения, но напрямую воспользоваться ими нельзя.

Такие задачи и собрал в отдельный раздел П. Цюльке в книге «Геометрические построения на ограниченном куске плоскости» (1935). Их объединяет одна и та же идея: недоступную точку нужно заменить вспомогательной конструкцией — параллельной прямой, серединой отрезка, центром окружности — которая позволила бы продолжить работу, не выходя за пределы доступной области. Ниже я постараюсь разобрать наиболее показательные из этих построений и показать, на какие общегеометрические факты они опираются.

1. Общая идея: устранение недоступной вершины

Пусть дан многоугольник, одна из вершин которого — обозначим её X — недоступна. Вершины A и B, соседние с X, лежат в нашем распоряжении. Цюльке предлагает следующий простой приём: соединяем A и B прямой, после чего проводим через X прямую, параллельную AB. Получается, что недоступная вершина «заменяется» направлением — мы знаем, по какой прямой она движется, и этого почти всегда достаточно, чтобы сохранить нужные геометрические свойства фигуры.

Логика здесь следующая. Если нас интересуют отношения длин, площади, точки пересечения медиан или биссектрис, то многие из этих величин не меняются при параллельном переносе вершины вдоль фиксированного направления. Поэтому, заменив точку X любой удобной точкой на параллельной прямой, мы получаем многоугольник, с которым уже можно работать обычными средствами, а потом перенести результат обратно. Этот приём становится скелетом для большинства последующих построений.

2. Деление стороны BC треугольника ABC, когда вершины B и C недоступны

Эта задача удобна тем, что в ней хорошо видна работа метода. Рассмотрим треугольник ABC, у которого недоступны две прилежащие к стороне BC вершины — B и C. Сама сторона BC при этом видна, но провести к ней циркулем что-либо невозможно: концы отрезка лежат вне доступной области.

Первый случай — когда третья вершина A нам доступна. Проведём прямую B_1C_1, параллельную BC и расположенную в удобной области чертежа. Получим треугольник AB_1C_1, подобный исходному. Его сторону B_1C_1 легко разделить пополам обычным способом — отметим середину D_1. Соединим D_1 с вершиной A: прямая AD_1 при продолжении пересечёт сторону BC ровно в её середине D. Это следует из того, что прямая AD проходит через центр тяжести и треугольника ABC, и треугольника AB_1C_1 (рис. 1).

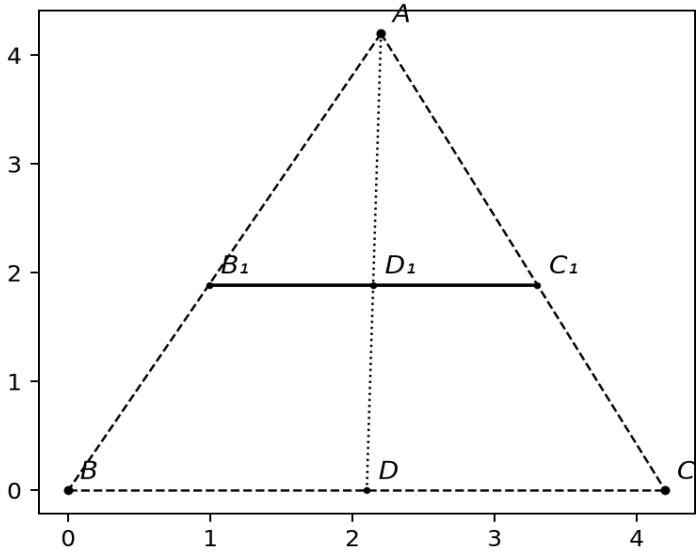

Рисунок 1. Деление стороны BC, когда вершина A доступна

Естественно возникает вопрос: обязательно ли делить B_1C_1 именно циркулем? Оказывается, нет. Можно провести ещё одну параллельную прямую B_2C_2 и соединить точки крест-накрест: прямые B_1C_2 и B_2C_1 пересекутся на той же прямой AD. Таким образом, нужное направление выделяется чисто проективно, без измерения длин.

Второй случай гораздо интереснее: недоступны все три вершины треугольника. Здесь поступаем так. Проводим к BC две параллельные прямые B_1C_1 и B_2C_2, отмечаем их середины D_1 и D_2 (это можно сделать стандартно

или с помощью того же «крест-накрест» приёма). Прямая D_1D_2 пересекает сторону BC ровно в её середине D (рис. 2). Для контроля можно построить ещё одну параллель B_3C_3 и убедиться, что её середина лежит на той же прямой.

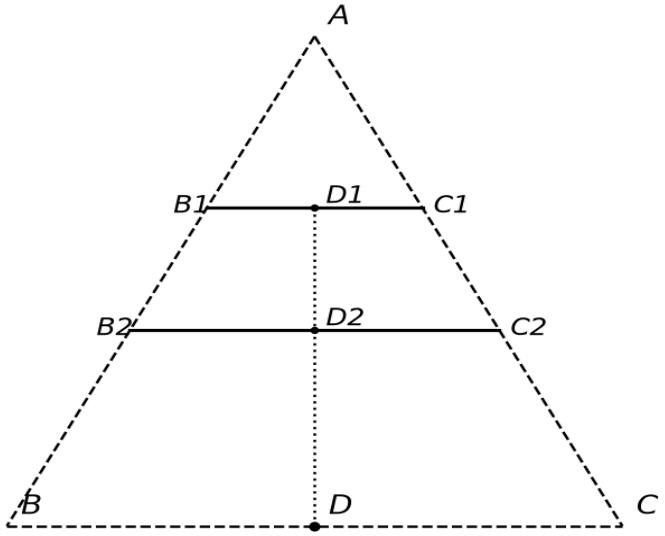

Рисунок 2. Случай, когда недоступны все три вершины

Точность построения здесь зависит не только от добросовестности чертёжника, но и от того, насколько удачно выбраны вспомогательные параллели: чем дальше они отстоят друг от друга, тем меньше итоговая погрешность.

3. Вписанная окружность треугольника с недоступными вершинами

Задача о вписанной окружности на первый взгляд кажется труднодоступной: чтобы провести биссектрису угла, у нас, по идее, должна быть сама вершина. Однако в книге Цюльке для деления угла, у которого вершина недоступна, приводится отдельный приём (задача 9). Его суть в том, чтобы построить биссектрису, не прикасаясь к самой вершине: используются точки на сторонах угла, равноудалённые от прямых, и пересечения вспомогательных окружностей.

Имея такой инструмент, задача решается коротко. Достаточно построить биссектрисы двух углов треугольника указанным способом и найти их точку пересечения — это и есть центр вписанной окружности. Радиус определяется обычным способом: опускается перпендикуляр из центра на любую из доступных сторон. Поверка точности также не вызывает сложностей: третья биссектриса должна пройти через ту же точку, и любое отклонение сразу видно на чертеже.

4. Описанная окружность вокруг треугольника, вершины которого недоступны

Эта задача имеет ясное практическое содержание. Цюльке упоминает типичный пример: на топографической карте три ориентира A, B, C лежат за её рамкой, но каждый из них задан направлениями пересекающихся в нём прямолинейных дорог. Нужно отметить на карте точку M, равноудалённую от этих трёх ориентиров, и определить расстояние от неё до них — то есть фактически найти центр и радиус описанной окружности.

Поступаем следующим образом. Возьмём одну из сторон треугольника, например AB, и проведём к ней две параллельные прямые XY и UV в доступной части чертежа. С их помощью, повторяя метод из второго раздела, найдём середину F стороны AB. Затем через F проведём две прямые: одну — параллельно AC, другую — параллельно BC. Эти прямые пересекут стороны AC и BC в точках E и D, которые также оказываются их серединами.

Теперь у нас есть треугольник DEF, все вершины которого доступны. Восстановив перпендикуляры в точках D, E, F к сторонам исходного треугольника, мы получим три прямые, пересекающиеся в одной точке — это и есть искомый центр M. Чтобы найти радиус описанной окружности треугольника ABC, опишем окружность вокруг DEF: её радиус, как нетрудно проверить, в два раза меньше нужного нам радиуса (рис. 3).

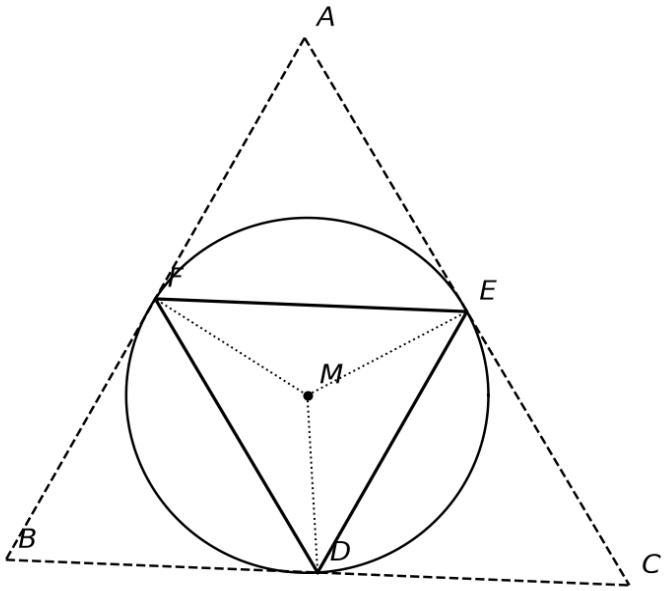

Рисунок 3. Центр описанной окружности через серединный треугольник DEF

Это построение опирается на простое подобие: треугольник DEF подобен ABC с коэффициентом 1/2, причём центром подобия служит точка пересечения медиан. Поэтому центр описанной окружности около ABC и центр описанной окружности около DEF — это одна и та же точка, а соответствующие радиусы отличаются ровно вдвое.

5. Построение высот треугольника с недоступными вершинами

Самая красивая задача из всего раздела связана с построением высот. Здесь работает знаменитая теорема о девяти точках: окружность, проходящая через середины сторон D, E, F треугольника ABC, проходит также через основания его высот и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром. Эта окружность называется окружностью Фейербаха.

Если мы воспользуемся построением предыдущего раздела, то получим не только центр описанной окружности, но и саму окружность Фейербаха — она проходит через уже найденные точки D, E, F. Пересечения этой окружности со сторонами треугольника ABC во второй раз дают точки P, Q и R, которые и являются основаниями искомых высот (рис. 4). Остаётся только провести через эти основания перпендикуляры — они пройдут через недоступные вершины, и направления высот будут восстановлены.

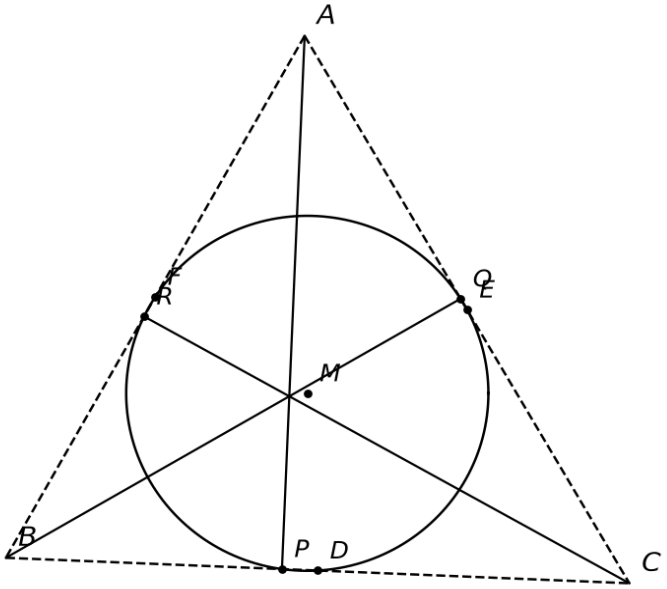

Рисунок 4. Основания высот P, Q, R как вторые точки пересечения окружности Фейербаха со сторонами

Здесь стоит обратить внимание на изящную проверку: восстановленные в точках P, Q, R перпендикуляры к соответствующим сторонам обязаны пересекаться в одной точке — ортоцентре. Если они дали «треугольничек погрешностей», значит, где-то в построении накопилась ошибка. Цюльке также показывает, что перпендикуляры MD, ME, MF можно рассматривать как высоты внутреннего треугольника DEF, что даёт ещё один способ контроля.

Если же окружность Фейербаха строить не хочется, можно поступить иначе. Применив к одной из вершин, скажем A, отдельный приём построения перпендикуляра из недоступной точки, мы находим основание P высоты, опущенной из A. После этого через P проводят прямые, параллельные направлениям P_1Q_1 и P_1R_1, заранее построенным в подобном вспомогательном треугольнике. Точки Q и R, в которых эти прямые встречают стороны AC и AB, и будут основаниями двух других высот.

Заключение

Задачи на построение с недоступными вершинами интересны не столько техническими трюками, сколько тем, что они заставляют по-новому увидеть знакомые объекты. Середина стороны, биссектриса, центр описанной окружности — всё это перестаёт быть результатом «механического» применения циркуля и превращается в следствие более глубоких свойств: подобия, параллельного переноса, теоремы о девяти точках.

Метод, лежащий в основе всех рассмотренных задач, по сути один: недоступная часть фигуры заменяется параллельной или подобной ей доступной частью, нужное построение проводится в «удобной» области, после чего результат переносится обратно. Этот же подход применяется и в современной инженерной практике, где работать приходится не с идеальным листом бумаги, а с реальной местностью, имеющей свои препятствия и ограничения.

Изучение подобных задач полезно ещё и тем, что развивает геометрическое воображение и приучает к аккуратности: ошибка, незаметная в маленькой части чертежа, при переносе на полную фигуру может оказаться значительной. Поэтому контроль точности — обязательная часть каждого такого построения, а не дополнительная роскошь.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Цюльке П. Геометрические построения на ограниченном куске плоскости. — М.; Л.: ОНТИ, 1935.

2. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Часть I. Планиметрия. — М.: Учпедгиз, 1957.

3. Погорелов А. В. Геометрия: учебник для 7–9 классов общеобразовательных учреждений. — М.: Просвещение, 2014.

4. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2006.

5. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия: учебное пособие. — М.: Просвещение, 2010.