

NAMANGAN DAVLAT
UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI, [2026-9]
ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427



01.00.00-FIZIKA-MATEMATIKA
journal.namdu.uz
PHYSICS AND MATHEMATICS

УДК 517.91

PROEKTIV ALMASHTIRISHLAR VA PROEKTIV INVARIANTLAR

Jizzax davlat pedagogika universiteti
Matematika kafedrası dotsenti, f.m.f.n.,
Qurbonov Ergash Qurolovich
ergash_qurbonov68@mail.ru

Annotatsiya: Tekislikdagi proektiv geometriya faninida o'rganiladigan nuqtalarning murakkab nisbati hamda uch nuqtaning kollinearlik shartlari barcha manbalarda proektiv geometriyaning aksiomatik metodlar vositasida o'rganilgan va bazi xossalari shu metod asosida isbot qilingan. Farqli ravishda mazkur maqolada to'rt nuqtaning murakkab nisbati hamda uchta nuqtaning kollinearlik shartlari analitik usullarda isbotlangan.

Kalit so'zlar: Proektiv almashtirishlar, proektiv to'rtburchik va proektiv tekislik, bir jinsli koordinatalar, murakkab nisbat, kollinearlik shartlari.

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ПРОЕКТИВНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

Аннотация: В учебной дисциплине «Проективная геометрия» на плоскости двойное отношение четырёх точек, а также условия коллинеарности трёх точек во всех источниках изучаются с использованием аксиоматических методов проективной геометрии, и некоторые свойства доказываются на основе данного метода. В отличие от этого, в данной статье двойное отношение четырёх точек и условия коллинеарности трёх точек доказаны аналитическими методами.

Ключевые слова: проективные преобразования, проективная прямая и проективная плоскость, однородные координаты, двойное отношение, условия коллинеарности.

PROJECTIVE TRANSFORMATIONS AND PROJECTIVE INVARIANTS

Abstract: In the discipline of Projective Geometry, the cross-ratio of four points in the plane, as well as the conditions for the collinearity of three points, are studied in all sources using the axiomatic methods of projective geometry, and some of their properties are proved based on this method. In contrast, in this paper, the cross-ratio of four points and the conditions for the collinearity of three points are proved using analytical methods.

Keywords: projective transformations, projective line and projective plane, homogeneous coordinates, cross-ratio, conditions for collinearity.

1. Kirish

Afsuski hozirgi kunda ham proektiv geometriya fanidan o'zbek tilida batafsil yozilgan darslik yoki o'quv qo'llanmalar yoq. Shunday bo'lsa maqolada proektiv geometriyaning tayanch tushunchalaridan bo'lgan to'rt nuqtaning murakkab nisbati hamda uch nuqtaning kollinearlik shartlari analitik usullarda isbot qilingan. Teoremlarni isbot qilishda Algebra va sonlar nazariysi fanidagi detirninantlar va matritsalar nazariyasiga tegishli bo'lgan usullardan, bir jinsli koordinatalar tushunchasidan foydalanildi. Natijada proektiv to'rtburchik va proektiv tekislikdagi proektiv almashtirishlarning invariantlari aniqlandi.

2. Adabiyotlar tahlili.

[1] adabiyotda yevklid tekisligidagi analitik geometriya tushunchalarining proektiv tekislikdagi va proektiv fazodagi ko'rinishlari batafsil keltirilgan. [2] manba asosan proektiv tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqlar bilan bog'liq geometrik xarakteristikalar o'rganilgan. Bu yerda yevklid tekisligidagi ikkinchi tartibli chiziqlarning qaysi xossalari proektiv tekislikda ham o'rinni ekanligi ko'rsatilgan. [3] darslik proektiv geometriya asoslariga bog'liq ishlangan. Darslik proektiv geometriyaning aksiomalari sistemasidan boshlanib, proektiv tekislikdagi yasashga doir masalalar bilan yakuniga yetgan. [4] manbada proektiv geometriya tushunchalari hamma tushunadigan analitik usullarda bayon qilingan. Bunda

nuqtaning bir jinsli koordinatalaridan unumli foydalanilgan. [5] darslikni juda ham keng qamrovli deyish mumkin. Chunki, bu yerda ham proektiv ham chizma geometriya tushunchalari parallel o'rganilgan.

3. Tadqiqot metodologiyasi.

Proektiv geometriyaning shunday tushunchalari ham borki, ularni faqat aksiomatik usullardan foydalanib o'rganish mumkin bo'lsa, shunday bo'limlari borki, ularni chizma geometriya usullaridan foydalanib o'rganish mumkin. Shunday bo'lsada, proektiv geometriyaning asosiy metodlari bu markaziy proektsiyalash usulidir. Shundan kelib chiqib, proektiv geometriya faqat markaziy proektsiyalashda invariant tushunchalarni o'rganadi deyish mumkin. Aniq qilib aytganda maqolada markaziy proektsiyalash usullaridan foydalanilgan.

4. Tahlil va natijalar.

Maqola tahlili shuni ko'rsatadiki, proektiv geometriya tushunchalarini o'rganishda eng qulay usul analitik usuldir. Natijaviylik shundan iboratki, o'rganilayotgan yoki izlanayotgan tushuncha aniq tenglamalarga ega bo'ladi. Analitik ifodalarga qarab har qanday tushunchani tasavvur qilish va anglash tezlashadi.

1. Proektiv to'g'ri chiziqdagi proektiv almashtirishlar

va ularning asosiy invariantlari.

Proektiv to'g'ri chiziqdagi proektiv almashtirishlar matritsa va analitik ko'rinishlarda berilishi mumkin. Ular quyidagilardan iborat.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad ad - bc \neq 0$$

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy, \end{cases} \quad ad - bc \neq 0 \quad (1.1)$$

1.1-teorema. Proektiv to'g'ri chiziqdagi (1.1) proektiv almashtirishlarda to'rt nuqtaning murakkab nisbati o'zgarmaydi.

Isbot. Qulaylik uchun (1.1) almashtirishlarda o'zgaruvchilarni almashtiramiz:

$$t = \frac{x}{y}$$

U holda

$$t' = \frac{x'}{y'} = \frac{ax + by}{cx + dy}$$

nisbatdan ni yo'qotsak y

$$(1.2) t' = \frac{a \frac{x}{y} + b}{c \frac{x}{y} + d} = \frac{at + b}{ct + d}$$

kelib chiqadi. Endi teoremda keltirilgan to'rt nuqtaning murakkab nisbatiga o'tamiz. Agar nuqtalar bitta proektiv to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lsa, ularning murakkab nisbati: A, B, C, D

$$\mu(ABCD) = \frac{AC : BC}{AD : BD}$$

Songa teng edi. Agar nuqtalar mos holda koordinatalarga ega bo'lsalar, murakkab nisbatning koordinatalardagi ko'rinishi: $A, B, C, D \rightarrow A(a), B(b), C(c), D(d)$

$$(1.3) \mu(ABCD) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$$

(1.2) almashtirishni ning funktsiyasi sifatida qaraymiz: t

$$f(t) = \frac{at + b}{ct + d}$$

Proektiv to'g'ri chiziqda yotga va nuqtalar uchun quyidagi ayirmani qaraymiz. x, y

$$f(x) - f(y) = \frac{(ax + b)(cy + d) - (ay + b)(cx + d)}{(cx + d)(cy + d)}$$

Tushunarli bo'lsin uchun suratni alohida ochib chiqamiz:

$$acxy + adx + bcy + bd - (acxy + ady + bcx + bd)$$

Tegishli hadlarni ixchamlasak

$$f(x) - f(y) = \frac{ad(x - y) + bc(y - x)}{(cx + d)(cy + d)} = \frac{(ad - bc)(x - y)}{(cx + d)(cy + d)} \quad (1.4)$$

kelib chiqadi. (1.4) formula teoremani isbotini to'liq taminlaydi. Aniq qilib aytganda nuqtalarning obrazlarini lar bilan belgilab, (1.4) formuladagi va larning o'rinlariga larni juft-jufti bilan qo'yamiz: $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$

$$A'(a'), B'(b'), C'(c'), D'(d') \text{ x } y \text{ a'}, b, c', d'$$

$$c' - a' = \frac{(ad - bc)(c - a)}{(cc + d)(ca + d)},$$

$$d' - b' = \frac{(ad - bc)(d - b)}{(cd + d)(cb + d)},$$

$$c' - b' = \frac{(ad - bc)(c - b)}{(cc + d)(cb + d)},$$

$$d' - a' = \frac{(ad - bc)(d - a)}{(cd + d)(ca + d)}.$$

Topilganlarni murakkab nisbatning (1.3) formulasiga qo'yisak:

$$\mu(A'B'C'D') = \frac{(c - a)(d - b)}{(c - b)(d - a)}$$

hosil bo' ladi. Demak kelib chiqdi. $\mu(A'B'C'D') = \mu(ABCD)$

Teorema isbot bo' ldi.

2. Proektiv tekislikdagi proektiv almashtirishlar va ularning asosiy invariantlari.

P_2 proektiv tekislikda bitta proektiv to'g'ri chiziqda yotgan uchta nuqtalar

$$A(x_1 : y_1 : z_1), \quad B(x_2 : y_2 : z_2), \quad C(x_3 : y_3 : z_3)$$

birjinsli koordinatalari bilan berilgan bo'lsin. U holda proektiv tekislikdagi proektiv almashtirishlar quyidagi formulalar bilan aniqlanadi.

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 \\ y'_1 = a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1 \\ z'_1 = a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1 \end{cases} \quad (2.1)$$

Bu erda o' tish matritsasi va detirminanti:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \det(M) \neq 0$$

A' , B' , C' lar berilgan nuqtalarning (2.1) almashtirishdagi obrazlari bo'lsin.

2.1-teorema. Proektiv tekislikdagi (2.1) proektiv almashtirishlarda bir to'g'ri chiziqda yotuvchi uchta nuqtaning kollinearlik shartlari saqlanadi.

Isbot. nuqtalarni nuqtalar orqali o' tish matritsalarini yordamida ifodalaymiz. A , B , C A' , B' , C'

$$A' = M(A), \quad B' = M(B), \quad C' = M(C)$$

Analitik geometriya kursida o'rganilgan detirminantlarni ko'paytirish usulidan foydalanamiz:

$$\det(A', B', C') = \det M \cdot \det(A, B, C)$$

Shartga ko' ra nuqtalar bitta proektiv to' g' ri chiziqda yotibdi. U holda A, B, C

$$\det(A, B, C) = 0$$

Bundan esa o' z navbatida kelib chiqadi. larning detirminanti nolga teng degan so' z bu nuqtalarning koordinatalaridan tuzilgan detirminantning qiymati nolga teng degani. $\det(A', B', C') = \det M \cdot 0 = 0$ A', B', C'

Demak:

$$\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 \end{vmatrix} = 0$$

Teorema isbot bo' ldi. Teoremaning mazmuni shundan iboratki, (2.1) proektiv almashtirishda nuqtalarning shu to' g' ri chiziqdagi o' rinlari almashishi mumkin, broq ularning kollinearlik shartlari saqlanadi.

5. Xulosa va takliflar.

Tadqiqot natijasida proektiv almashtirishlarning asosiy xossalari hamda ularning proektiv geometriyadagi ahamiyati o' rganildi. Proektiv almashtirishlar ta'sirida nuqtalar, to' g' ri chiziqlar va geometrik konfiguratsiyalar o' zgarishi mumkin bo' lsa-da, ayrim muhim geometrik munosabatlar saqlanib qolishi aniqlandi. Xususan, proektiv invariantlar proektiv almashtirishlarga nisbatan o' zgarimas bo' lib, proektiv geometriyaning asosiy tushunchalarini tavsiflashda muhim vosita hisoblanadi.

Tadqiqot natijalari proektiv almashtirishlar yordamida geometrik masalalarni soddalashtirish, turli konfiguratsiyalar orasidagi bog' lanishlarni aniqlash va geometrik xossalarning invariant jihatlarini tadqiq etish imkonini beradi. Proektiv invariantlar nazariyasi geometriyaning boshqa bo' limlari, jumladan, algebraik geometriya, differensial geometriya va kompyuter geometriyasi bilan bog' liq masalalarni o' rganishda ham muhim ahamiyatga ega.

Kelgusida proektiv almashtirishlarning yuqori o' lchamli fazolardagi xususiyatlarini, proektiv invariantlarning yangi turlarini hamda ularning kompyuter grafikasi, tasvirlarni qayta ishlash va geometrik modellashtirishdagi qo' llanilishini tadqiq etish taklif etiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Атанасян Л.С., Покровский В.Г., Ушаков А.Б. Геометрия. Учебное пособие. 2-издание, Электронное. Лаборатория знаний-2020.
2. Вертинская Н.Д. О некоторых особенностях поведения кривых второго порядка на проективной плоскости. Современные науки и технологии №10. 2014. Усолье-Сибирское, e-mail: stevia@mail.ru.
3. Графский О.А. Основы аффинной и проективной геометрии. Учебное пособие. Издательство ДВГУПС. Хабаровск-2018.
4. Гусева Н.И. и др. Проективная геометрия. Москва, Академия, 2013.
5. Пеклич В. А. Высшая начертательная геометрия: Учебное пособие. М:
6. АСВ, 2000. – 344 с.