

NAMANGAN DAVLAT
UNIVERSITETI
ILMIY AXBOROTNOMASI, [2026-9]
ISSN:2181-1458
ISSN:2181-0427



01.00.00-FIZIKA-MATEMATIKA
journal.namdu.uz
PHYSICS AND MATHEMATICS

IKKI HOLATLI BIR JINSLI MARKOV ZANJIRINING YAQINLASHISHINI SPEKTRAL TAVSIFLASH

Mo' minov Jahongir Muhammadjon o' g' li

Mirzo Ulug' bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti magistri

ORCID: 0009-0009-8870-8241

E-mail: j.m.muminov@gmail.com

Annotatsiya: Maqolada ikkita holatga ega bo'lgan bir jinsli Markov zanjirining chekli vaqt oralig' idagi va chegaraviy xatti-harakati o'rganilgan. Zanjirning o' tish matritsasi va o' tish ehtimollari orqali aniqlanadi. Tadqiqotning asosiy maqsadi boshlang'ich taqsimot ta'sirining kamayish tezligini analitik baholashdan iborat. Buning uchun ikkinchi xos qiymat va spektral tasviridan foydalanilgan. O' tish matritsasining chegaraviy matritsadan og'ishi geometrik tezlik bilan kamayishi ko'rsatilgan. bo'lganda statsionar taqsimotga yaqinlashish monoton, bo'lganda esa so'nuvchi tebranishlar ko'rinishida sodir bo'ladi. Chekli gorizontdagi xatolik, to'liq variatsiya masofasi va aralashish vaqti tahlil qilingan, va qiymatlariga ega zanjirlar taqqoslangan. Parametrlarning chegaraviy holatlari va kuzatilgan o' tishlar asosida statistik baholash masalasi ham ko'rib chiqilgan. $ab\lambda_2 = 1 - a - bP^n = \Pi + \lambda_2^n Z |\lambda_2|^n \lambda_2 > 0 \lambda_2 < 0 \lambda_2 = 0,40,80,9$

Kalit so'zlar: Markov zanjiri, o' tish matritsasi, statsionar taqsimot, xos qiymat, spektral bo' shliq, chekli gorizont, to'liq variatsiya masofasi, aralashish vaqti.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СХОДИМОСТИ ДВУХСОСТОЯНИЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

Аннотация: В статье исследуется конечногоризонтное и предельное поведение однородной цепи Маркова с двумя состояниями. Переходная матрица задаётся вероятностями a и b , определяющими переходы между состояниями. Цель исследования состоит в аналитической оценке скорости исчезновения зависимости от начального распределения. Основным инструментом является спектральное представление, где представляет стационарный компонент, а является вторым собственным значением переходной матрицы. Установлено, что отклонение от предельного режима уменьшается пропорционально. Положительный знак соответствует монотонной сходимости, а отрицательный знак приводит к затухающим осцилляциям. Рассматриваются расстояние по полной вариации, время перемешивания, конечногоризонтная ошибка и граничные значения параметров. Проведено сравнение переходных матриц со вторыми собственными значениями 0,4, 0,8 и 0,9. Приведён иллюстративный пример оценивания параметров по наблюдаемым числам переходов. Полученные результаты показывают, что стационарное распределение должно использоваться совместно с оценкой скорости сходимости. $P^n = \Pi + \lambda_2^n Z \Pi \lambda_2 = 1 - a - b |\lambda_2|^n \lambda_2$

Ключевые слова: цепь Маркова, переходная матрица, стационарное распределение, собственное значение, спектральный зазор, конечный горизонт, расстояние по полной вариации, время перемешивания.

SPECTRAL CHARACTERIZATION OF CONVERGENCE OF A TWO-STATE HOMOGENEOUS MARKOV CHAIN

Abstract: The finite-horizon and limiting behavior of a homogeneous two-state Markov chain is investigated. The transition matrix is determined by probabilities a and b , which describe transitions between the two states. The purpose of the study is to obtain an analytical estimate of the rate at which the influence of the initial distribution disappears. The main analytical tool is the spectral representation, where is the stationary component and is the second eigenvalue of the transition matrix. The deviation from the limiting regime is shown to decrease proportionally to. A positive value of produces monotone convergence, whereas a negative value produces damped oscillations. Total variation distance, mixing time, finite-horizon error, and boundary parameter cases are examined. Transition matrices with second eigenvalues 0,4, 0,8, and 0,9 are compared. An illustrative example of parameter estimation from observed transition counts is also presented. The results demonstrate that a stationary distribution should be used together with an explicit assessment of the convergence rate. $P^n = \Pi + \lambda_2^n Z \Pi \lambda_2 = 1 - a - b |\lambda_2|^n \lambda_2$

Keywords: Markov chain, transition matrix, stationary distribution, eigenvalue, spectral gap, finite horizon, total variation distance, mixing time.

Введение

Цепи Маркова являются одним из основных математических инструментов исследования систем, состояние которых изменяется случайным образом. Марковская модель предполагает, что при известном текущем состоянии условное распределение следующего состояния не зависит от всей предшествующей истории процесса. Это свойство позволяет описывать динамику системы с помощью переходной матрицы и исследовать как вероятности переходов за конечное число шагов, так и поведение системы при неограниченном увеличении временного горизонта.

В конечных однородных цепях Маркова важное место занимает стационарное распределение. Оно не изменяется после умножения на переходную матрицу и описывает вероятностный режим, который может установиться в долгосрочной перспективе. Однако существование стационарного распределения ещё не даёт полной информации о переходной динамике. Для практических задач необходимо установить, насколько распределение в конкретный момент времени отличается от стационарного и какое число переходов требуется для достижения заданной точности.

Даже в двухсостоянийной модели конечногоризонтное распределение может существенно отличаться от предельного. Если переходы между состояниями происходят редко, цепь длительное время сохраняет информацию о начальном состоянии. В таком случае формальная замена распределения в момент стационарным распределением может создавать заметную ошибку. Если же вероятность перехода к стационарному режиму велика, зависимость от начальных условий исчезает за небольшое число шагов. n

Скорость сходимости определяется спектральными характеристиками переходной матрицы. В двухсостоянийном случае одно собственное значение всегда равно единице, а второе собственное значение имеет вид

$$\lambda_2 = 1 - a - b,$$

где a и b являются вероятностями переходов между двумя состояниями. Модуль определяет скорость уменьшения переходного отклонения. Знак, в свою очередь, показывает, будет ли приближение к стационарному режиму монотонным или осциллирующим. $ab|\lambda_2|$

Актуальность исследования связана с необходимостью разграничивать предельное и конечногоризонтное поведение марковской модели. Стационарное распределение отвечает на вопрос о долгосрочной структуре вероятностей, но не определяет точность стационарного приближения при заданном числе переходов. Для решения этой задачи требуются явные формулы для степени переходной матрицы, конечногоризонтной ошибки и времени перемешивания.

Цель работы состоит в исследовании спектральной зависимости скорости сходимости двухсостоянийной однородной цепи Маркова и в определении условий, при которых стационарное распределение может использоваться как достаточно точное приближение на конечном временном горизонте.

Для достижения цели решаются следующие задачи:

Определить стационарное распределение двухсостоянийной цепи Маркова;

Получить компактное представление матрицы многошаговых переходов;

Установить зависимость конечногоризонтной ошибки от второго собственного значения;

Сравнить монотонный и осциллирующий режимы сходимости;

Оценить время перемешивания для нескольких переходных матриц;

Описать граничные случаи параметров;

Показать влияние статистической неопределённости параметров на оценку скорости сходимости.

Исходная постановка задачи о предельном состоянии двухсостоянийной марковской цепи была рассмотрена автором в магистерской диссертации [4]. Настоящая статья систематизирует соответствующие аналитические результаты и концентрируется на конечногоризонтном отклонении, спектральной скорости сходимости и практической интерпретации времени перемешивания.

Обзор литературы

Теория цепей Маркова включает методы построения переходных матриц, классификацию состояний, исследование стационарных распределений и анализ предельного поведения. В работе Н. М. Taylor и S. Karlin [1] цепи Маркова рассматриваются как базовый класс стохастических моделей с дискретным временем. Представленный ими матричный подход позволяет вычислять многошаговые переходные вероятности и исследовать изменение распределения системы при последовательном применении одной и той же переходной матрицы.

Систематическое изложение математической теории дискретных цепей Маркова дано J. R. Norris [2]. Существенное значение имеют понятия неприводимости и периодичности. Неприводимость обеспечивает возможность достижения каждого состояния из любого другого состояния, а аperiodичность исключает устойчивое циклическое чередование распределений. Для конечной неприводимой и аperiodической цепи существует единственное стационарное распределение, к которому сходится распределение цепи независимо от начального состояния.

Однако качественного утверждения о сходимости недостаточно для оценки поведения цепи на конечном горизонте. Количественная теория сходимости конечных цепей Маркова развита в работе D. A. Levin и Y. Peres [3]. В ней расстояние по полной вариации используется для измерения различия между распределением цепи в момент времени и стационарным распределением. На основе этого расстояния определяется время перемешивания, то есть минимальное число шагов, после которого отклонение не превышает заранее установленного уровня. n

Спектральный подход связывает скорость сходимости с собственными значениями переходной матрицы. Для общей конечной цепи анализ может потребовать рассмотрения нескольких собственных значений, их кратностей и структуры соответствующих собственных пространств. Для двухсостоятельной цепи ситуация существенно упрощается: имеется только одно нетривиальное собственное значение. Поэтому влияние параметров переходов на скорость релаксации может быть выражено точной формулой.

В магистерской диссертации автора [4] исследовалось предельное состояние марковской цепи с двумя состояниями. В настоящей работе данный подход дополняется явным анализом конечногогоризонтной ошибки. Такое дополнение необходимо, поскольку две цепи могут иметь одинаковое стационарное распределение, но существенно различаться по скорости приближения к нему.

Анализ литературы позволяет выделить три взаимосвязанные характеристики. Первая характеристика — стационарное распределение, описывающее предельное соотношение вероятностей состояний. Вторая — второе собственное значение, определяющее сохранение переходного компонента. Третья — время перемешивания, связывающее спектральную скорость с заданной допустимой ошибкой. Совместное рассмотрение этих характеристик позволяет избежать необоснованного использования стационарного приближения.

Используемое далее представление степени двухсостоятельной переходной матрицы является стандартным следствием спектральной теории и не заявляется как новая формула. Содержательный результат работы заключается в последовательном применении этого представления к сравнению конечногогоризонтных режимов, классификации формы сходимости и оценке чувствительности выводов к параметрам модели.

Методология исследования

Постановка модели

Рассмотрим однородную цепь Маркова с пространством состояний $\{X_n\}_{n \geq 0}$

$$S = \{0, 1\}.$$

Параметр обозначает вероятность перехода из состояния в состояние, а параметр — вероятность перехода из состояния в состояние. Переходная матрица имеет вид

$$(3.1) P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, \quad 0 \leq a, b \leq 1.$$

Строки матрицы соответствуют текущему состоянию, а столбцы — состоянию на следующем шаге. Поэтому

$$a = \Pr(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0), \quad b = \Pr(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1).$$

Однородность означает, что переходная матрица не зависит от номера шага. Вероятности переходов за шагов содержатся в матрице. Если начальное распределение равно, то распределение в момент определяется формулой

$$(3.2) \mu_n = \mu_0 P^n.$$

Стационарное распределение удовлетворяет системе $\pi = (\pi_0, \pi_1)$

$$\pi P = \pi, \quad \pi_0 + \pi_1 = 1.$$

При получаем $a + b > 0$

$$(3.3) \pi = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b} \right).$$

Таким образом, стационарные вероятности определяются отношением переходных интенсивностей. Если вероятность перехода из состояния в состояние относительно велика, возрастает стационарная вероятность состояния. Аналогично увеличение повышает стационарную вероятность состояния. $100a1$

Спектральное представление

Собственные значения матрицы (3.1) равны

$$(3.4)\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 - a - b.$$

Первое собственное значение соответствует стационарному компоненту. Второе собственное значение определяет переходный компонент, зависящий от начального состояния. Введём матрицы

$$(3.5)\Pi = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}, \quad Z = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}.$$

Для степень переходной матрицы представляется в виде $a + b > 0$

$$(3.6)P^n = \Pi + \lambda_2^n Z.$$

В покомпонентной форме формула (3.6) принимает вид

$$(3.7)P^n = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b + a\lambda_2^n & a - a\lambda_2^n \\ b - b\lambda_2^n & a + b\lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

В частности, вероятность нахождения в состоянии через шагов при условии равна $0nX_0 = 0$

$$(3.8)P_{00}^{(n)} = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} \lambda_2^n.$$

Основное соотношение для анализа скорости сходимости имеет вид

$$(3.9)P^n - \Pi = \lambda_2^n Z.$$

Следовательно, для любой абсолютно однородной матричной нормы выполняется

$$(3.10)\|P^n - \Pi\| = |\lambda_2|^n \|Z\|.$$

Если, отклонение от предельной матрицы убывает геометрически. Если, стационарный режим достигается после одного перехода. Если, геометрическое затухание отсутствует. $0 < |\lambda_2| < 1$ $\lambda_2 = 0$ $|\lambda_2| = 1$

Конечногоризонтная ошибка

Пусть

$$\mu_0 = (q, 1 - q), \quad q = \Pr(X_0 = 0).$$

Тогда вероятность состояния в момент равна $0n$

$$(3.11)q_n = \frac{b}{a+b} + \left(q - \frac{b}{a+b}\right) \lambda_2^n.$$

Из (3.11) получаем точную конечногоризонтную ошибку:

$$(3.12)|q_n - \pi_0| = |q - \pi_0| |\lambda_2|^n.$$

Формула (3.12) разделяет ошибку на два множителя. Первый множитель зависит от начального распределения, а второй — от параметров переходной матрицы и числа шагов. Поэтому одна и та же цепь может демонстрировать разные абсолютные ошибки для различных начальных условий, но геометрическая скорость их уменьшения остаётся одинаковой.

Для распределений на двухэлементном пространстве расстояние по полной вариации равно абсолютной разности первых компонент. Следовательно,

$$(3.13)\|\mu_n - \pi\|_{TV} = |q - \pi_0| |\lambda_2|^n.$$

Максимизация по всем начальным распределениям даёт

$$(3.14)d_{TV}(n) = \max_{\mu_0} \|\mu_0 P^n - \pi\|_{TV} = \frac{\max(a,b)}{a+b} |\lambda_2|^n.$$

Обозначим

$$C = \frac{\max(a,b)}{a+b}.$$

Для время перемешивания с точностью определяется как $0 < |\lambda_2| < 1$

$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) = \min\{n \geq 0: d_{TV}(n) \leq \varepsilon\}.$$

Отсюда следует

$$(3.15)t_{\text{mix}}(\varepsilon) = \max\left\{0, \left\lceil \frac{\ln(C/\varepsilon)}{\ln(1/|\lambda_2|)} \right\rceil\right\}.$$

Спектральный зазор определяется формулой

$$(3.16)\gamma = 1 - |\lambda_2|.$$

Модуль является коэффициентом сохранения переходного отклонения за один шаг, а характеризует удалённость этого коэффициента от единицы. Чем больше спектральный зазор, тем быстрее происходит приближение к стационарному режиму. $|\lambda_2| \gamma$

Оценивание параметров

Пусть обозначает зарегистрированное число переходов из состояния в состояние. Оценки параметров по наблюдаемым частотам переходов имеют вид n_{ij}

$$(3.17) \hat{a} = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}}, \quad \hat{b} = \frac{n_{10}}{n_{10} + n_{11}}.$$

Оценка второго собственного значения определяется равенством

$$(3.18) \hat{\lambda}_2 = 1 - \hat{a} - \hat{b}.$$

Для иллюстративной оценки неопределённости используется условная биномиальная аппроксимация:

$$(3.19) SE(\hat{a}) = \sqrt{\frac{\hat{a}(1-\hat{a})}{n_{00} + n_{01}}}, \quad SE(\hat{b}) = \sqrt{\frac{\hat{b}(1-\hat{b})}{n_{10} + n_{11}}}.$$

Данная аппроксимация применяется только как наглядная оценка статистической погрешности. При анализе реальных марковских наблюдений необходимо дополнительно учитывать зависимость последовательных переходов и свойства наблюдаемой траектории.

Результаты и их анализ

Роль модуля и знака второго собственного значения

Из равенства (3.9) следует, что скорость исчезновения зависимости от начального распределения определяется множителем

$$|\lambda_2|^n.$$

Если мало, переходный компонент быстро становится незначительным. Если близко к единице, его уменьшение происходит медленно. $|\lambda_2| |\lambda_2|$

На рисунке 1 представлены точные значения функции для трёх значений модуля второго собственного значения. Диаграмма построена по аналитической формуле и не содержит эмпирических или искусственно сгенерированных данных. $|\lambda_2|^n$

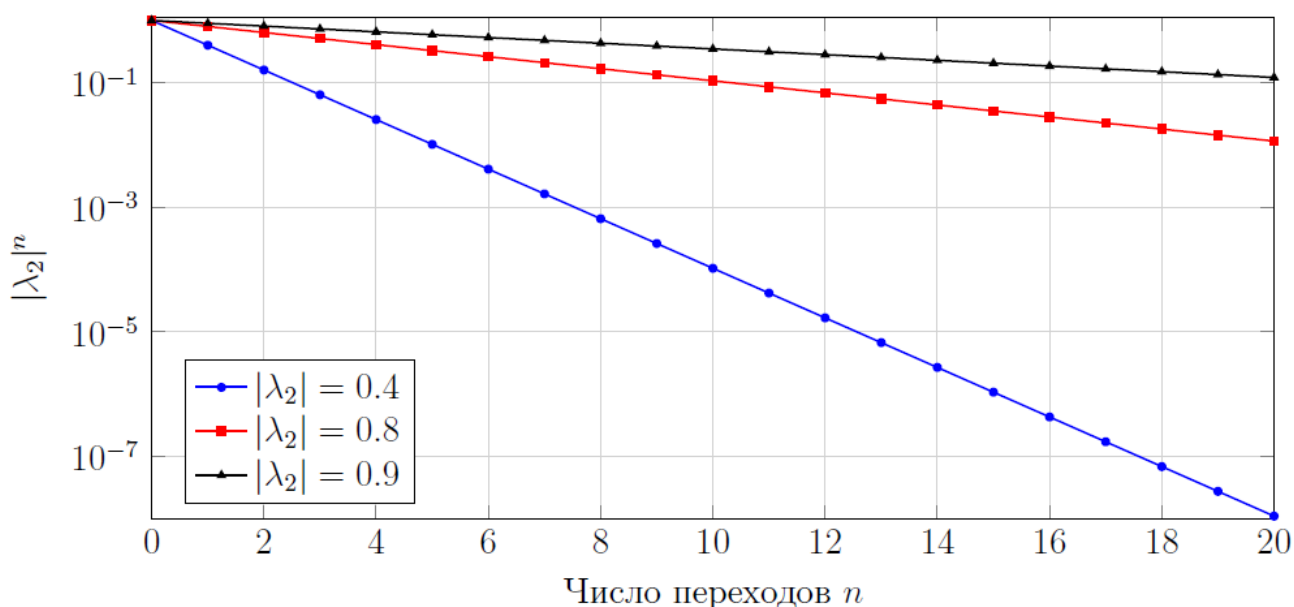


Рис. 1: Геометрическое уменьшение переходного компонента при различных значениях $|\lambda_2|$

При соответствующие множители равны $n = 10$

$$0,4^{10} \approx 0,0001049, \quad 0,8^{10} \approx 0,1074, \quad 0,9^{10} \approx 0,3487.$$

Следовательно, при влияние начального распределения практически исчезает за десять шагов. При к этому моменту сохраняется более трети первоначальной величины переходного компонента. $|\lambda_2| = 0,4$ $|\lambda_2| = 0,9$

Знак определяет форму сходимости. Если λ_2

$$\lambda_2 > 0 \Leftrightarrow a + b < 1,$$

то знак разности не меняется. Значения приближаются к стационарной вероятности с одной стороны. $q_n - \pi_0 q_n$

Если

$$\lambda_2 < 0 \Leftrightarrow a + b > 1,$$

то знак зависит от чётности. Поэтому значения попеременно находятся выше и ниже стационарного уровня.

Абсолютная амплитуда колебаний при этом уменьшается как $\lambda_2^n n q_n |\lambda_2|^n$

Для демонстрации осциллирующего режима рассмотрим

$$a = 0,9, \quad b = 0,8.$$

Тогда

$$\lambda_2 = 1 - 0,9 - 0,8 = -0,7, \quad \pi_0 = \frac{0,8}{1,7} = \frac{8}{17} \approx 0,4706.$$

При получаем $X_0 = 0$

$$(4.1) q_n = \frac{8}{17} + \frac{9}{17}(-0,7)^n.$$

Первые значения равны

$$q_1 = 0,1000, \quad q_2 = 0,7300, \quad q_3 = 0,2890.$$

Цепь пересекает стационарный уровень на каждом шаге, но величина отклонения последовательно уменьшается в раза. 0,7

На рисунке 2 сопоставлены нормированные переходные компоненты и. Первый компонент уменьшается монотонно, а второй меняет знак. $0,4^n(-0,7)^n$

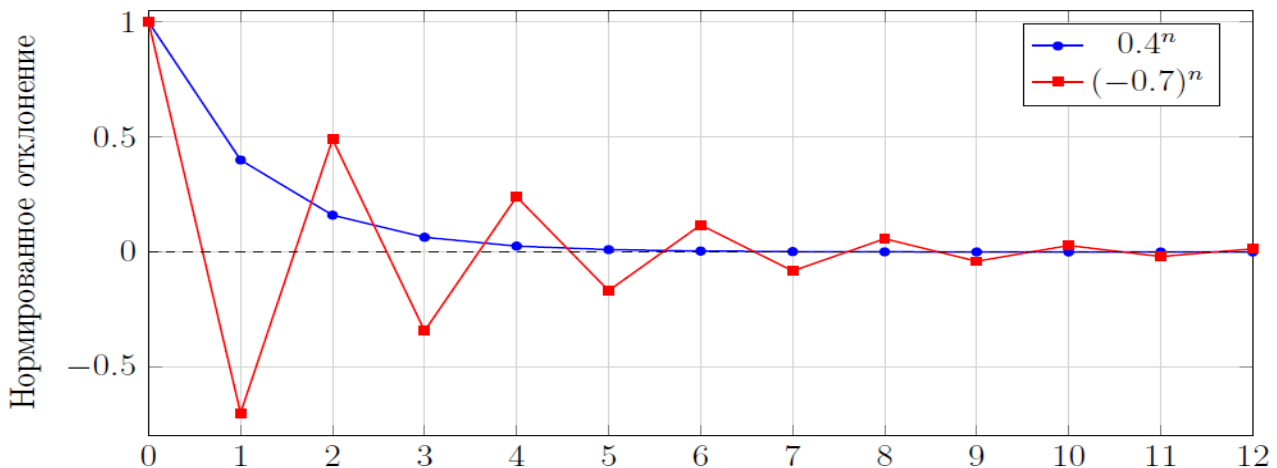


Рис. 2: Монотонный и осциллирующий режимы затухания переходного компонента

Сравнение подтверждает, что модуль второго собственного значения задаёт скорость сходимости, а знак определяет форму траектории. Цепи со значениями и имеют одинаковую скорость уменьшения абсолютной ошибки, хотя динамика переходных вероятностей различается. $\lambda_2 = 0,7 \lambda_2 = -0,7$

Сравнение переходных матриц

Рассмотрим четыре матрицы:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} P_1 &= \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}, \\ P_3 &= \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Во всех случаях начальным считается состояние, то есть. Результаты приведены в таблице 1. В последнем столбце указано время перемешивания при. $0q = 1\varepsilon = 0,05$

Таб. 1: Сравнение конечногоризонтной сходимости

Матрица	λ_2	π_0	q_{10}	q_{20}	$t_{\text{mix}}(0,05)$
P_1	0,4	0,6667	0,6667	0,6667	3
P_2	0,4	0,3333	0,3334	0,3333	3
P_3	0,8	0,5000	0,5537	0,5058	11

Матрица	λ_2	π_0	q_{10}	q_{20}	$t_{\text{mix}}(0,05)$
P_4	0,9	0,5000	0,6743	0,5608	22

Матрицы и имеют одинаковое второе собственное значение, но разные стационарные распределения. Для $P_1 P_2 \lambda_2 = 0,4 P_1$

$$\pi_0 = \frac{0,4}{0,2 + 0,4} = \frac{2}{3},$$

а для P_2

$$\pi_0 = \frac{0,2}{0,4 + 0,2} = \frac{1}{3}.$$

Несмотря на различие предельных вероятностей, обе цепи имеют одинаковую геометрическую скорость сходимости. При переходный множитель равен, поэтому различие между и уже несущественно. $n = 100,4^{10} q_{10} \pi_0$

Матрицы и симметричны и имеют одинаковое стационарное распределение $P_3 P_4$

$$\pi = (0,5; 0,5).$$

Однако их вторые собственные значения различаются:

$$\lambda_2(P_3) = 0,8, \quad \lambda_2(P_4) = 0,9.$$

Для при $P_3 X_0 = 0$

$$q_n = 0,5 + 0,5(0,8)^n,$$

а для P_4

$$(4.3) \quad q_n = 0,5 + 0,5(0,9)^n.$$

В случае получаем P_4

$$q_{10} = 0,5 + 0,5(0,9)^{10} \approx 0,6743,$$

$$q_{20} = 0,5 + 0,5(0,9)^{20} \approx 0,5608.$$

Таким образом, правильное значение на двадцатом шаге равно, а не. Конечногогоризонтное распределение всё ещё отличается от стационарного, хотя величина ошибки становится меньше по сравнению с десятым шагом. $0,56080,5001$

Время перемешивания дополнительно показывает различие между матрицами. Для коэффициент равен, поэтому условие $P_3 C 0,5$

$$0,5(0,8)^n \leq 0,05$$

впервые выполняется при. Для аналогичное условие $n = 11 P_4$

$$0,5(0,9)^n \leq 0,05$$

впервые выполняется при. При одинаковом стационарном распределении матрице требуется в два раза больше переходов для достижения выбранной точности. $n = 22 P_4$

Полученный результат показывает, что стационарное распределение не определяет длительность переходного периода. Если задача связана с прогнозом на конечном горизонте, необходимо анализировать как предельные вероятности, так и второе собственное значение.

Граничные случаи

Основные граничные режимы параметров представлены в таблице 2.

Таб. 2: Граничные режимы двухсостоянийной цепи

Условие	λ_2	Предельное поведение
$a = b = 0$	1	Оба состояния являются поглощающими. Начальное распределение сохраняется, единственного стационарного распределения нет.
$a = 0,$ $0 < b \leq 1$	1 $-b$	Состояние является поглощающим. Распределение сходится к. При состоянии достигается не более чем за один переход. $0(1, 0)b = 10$
$b = 0,$ $0 < a \leq 1$	1 $-a$	Состояние является поглощающим. Распределение сходится к. При состоянии достигается не более чем за один переход. $1(0, 1)a = 11$
$a + b = 1$	0	Строки матрицы совпадают. После одного перехода распределение становится стационарным независимо от начального состояния. P
$a = 1,$ $0 < b < 1$	$-b$	Цепь неприводима и апериодична. Сходимость имеет осциллирующий характер, а амплитуда отклонения убывает как. b^n
$b = 1,$ $0 < a < 1$	$-a$	Цепь неприводима и апериодична. Возникают затухающие осцилляции с амплитудой, пропорциональной. a^n
$a = b = 1$	-1	Цепь детерминированно чередует состояния и имеет период. Стационарное распределение существует, но распределение из фиксированного состояния не сходится. $2(0,5, 0,5)$

Случаи и соответствуют значениям, поэтому переходный компонент не затухает. В первом случае он сохраняет знак и начальное распределение остаётся неизменным. Во втором случае знак меняется на каждом шаге, что приводит к незатухающему периодическому режиму. $a = b = 0$ $a = b = 1$ $|\lambda_2| = 1$

При и, а также при и цепь является приводимой, но имеет единственное поглощающее состояние. Несмотря на отсутствие неприводимости, распределение сходится к точечной мере на поглощающем состоянии. Это показывает, что граничные случаи должны анализироваться отдельно от стандартного эргодического режима. $a = 0$ $b > 0$ $b = 0$ $a > 0$

Результаты оценивания параметров

Рассмотрим наблюдаемые числа переходов

$$n_{00} = 70, \quad n_{01} = 30, \quad n_{10} = 20, \quad n_{11} = 80.$$

Согласно (3.17),

$$\hat{a} = \frac{30}{70 + 30} = 0,3, \quad \hat{b} = \frac{20}{20 + 80} = 0,2.$$

Оценка второго собственного значения составляет

$$(4.4) \hat{\lambda}_2 = 1 - 0,3 - 0,2 = 0,5.$$

Следовательно, по точечным оценкам переходный компонент за один шаг уменьшается в два раза. Стационарное распределение оценённой матрицы равно

$$\hat{\pi} = \left(\frac{0,2}{0,3 + 0,2}, \frac{0,3}{0,3 + 0,2} \right) = (0,4, 0,6).$$

Стандартные ошибки в условной биномиальной аппроксимации равны

$$SE(\hat{a}) = \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{100}} \approx 0,0458,$$

$$SE(\hat{b}) = \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{100}} = 0,0400.$$

Приближённые 95%-е доверительные интервалы имеют вид

$$CI_a = [0,210, 0,390], \quad CI_b = [0,122, 0,278].$$

Если в рамках иллюстративного расчёта оценки и условно считать независимыми, то $\hat{a}\hat{b}$

$$SE(\hat{\lambda}_2) \approx \sqrt{0,0458^2 + 0,0400^2} \approx 0,0608.$$

Приближённый интервал для второго собственного значения равен

$$CI_{\lambda_2} \approx [0,381, 0,619].$$

Интервал показывает, что скорость сходимости не должна описываться только точечным значением. Если истинное значение находится ближе к верхней границе интервала, переходный компонент будет уменьшаться медленнее, чем следует из точечной оценки. Следовательно, статистическая неопределённость параметров переносится на прогноз конечногоризонтной ошибки и времени перемешивания. $\hat{\lambda}_2 = 0,5$

Практическая интерпретация и ограничения

Полученные результаты позволяют сформулировать практический порядок анализа двухсостоянийной марковской модели. Сначала необходимо оценить или задать параметры a и b . Затем вычисляются стационарное распределение и второе собственное значение. После этого для заданного горизонта определяется величина и конечногоризонтная ошибка. Если ошибка превышает допустимый уровень, стационарное распределение не следует использовать как замену фактическому распределению. $abn|\lambda_2|^n$

Особенно осторожный подход требуется при $a \approx b$. В этой области небольшое изменение параметров может заметно изменить время перемешивания. Поэтому ошибка оценивания и способна существенно повлиять на вывод о достаточности выбранного горизонта. $|\lambda_2| \approx 1$

Исследование ограничено двухсостоянийной однородной цепью. В модели предполагается, что переходная матрица не изменяется во времени и что условное распределение следующего состояния зависит только от текущего состояния. Модель непосредственно не описывает системы с долгой памятью, скрытыми состояниями или меняющимися переходными вероятностями.

Численные примеры предназначены для демонстрации аналитических закономерностей и не являются результатами отдельного эмпирического эксперимента. Пример переходных частот также имеет иллюстративный характер. Поэтому количественные выводы относятся только к рассмотренным параметрам и не должны автоматически переноситься на другие стохастические системы.

Вместе с тем двухсостоянийная модель позволяет точно показать различие между предельной вероятностью и скоростью её достижения. В моделях с большим числом состояний аналогичный анализ требует учёта нескольких собственных значений, а иногда также структуры собственных векторов и возможной необратимости переходной матрицы. Дальнейшее исследование может быть связано с многосостоянийными цепями, неоднородными переходами, скрытыми марковскими моделями и более точными методами статистического оценивания спектральных характеристик.

Заключение

В статье исследована однородная цепь Маркова с двумя состояниями и переходной матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}.$$

Для стационарное распределение определяется формулой $a + b > 0$

$$\pi = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b} \right).$$

Оно описывает предельное соотношение вероятностей состояний, но не содержит полной информации о скорости достижения предельного режима.

Основным аналитическим соотношением является спектральное представление

$$P^n = \Pi + \lambda_2^n Z, \quad \lambda_2 = 1 - a - b.$$

Из него следует, что отклонение многошаговой переходной матрицы от предельной матрицы уменьшается пропорционально. Поэтому модуль второго собственного значения определяет скорость потери памяти о начальном распределении. При малом стационарное приближение становится точным за небольшое число шагов. При, близком к единице, переходный режим сохраняется длительное время. $|\lambda_2|^n |\lambda_2|$

Знак второго собственного значения определяет форму сходимости. При отклонение сохраняет знак и уменьшается монотонно. При знак отклонения меняется на каждом шаге, что приводит к затухающим осцилляциям. При осцилляции не затухают, и цепь имеет период два. $\lambda_2 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_2 = -1$

Сравнение переходных матриц показало, что одинаковые стационарные распределения могут сочетаться с различными скоростями сходимости. Для матрицы с при начальном состоянии получены значения $\lambda_2 = 0.90$

$$q_{10} \approx 0,6743, \quad q_{20} \approx 0,5608,$$

тогда как стационарная вероятность равна. Этот результат подтверждает необходимость оценки конечногоризонтной ошибки и времени перемешивания до использования стационарного распределения в прикладных расчётах. $0,5$

Статистический пример показал, что неопределённость оценок переходных вероятностей переносится на оценку второго собственного значения и прогноз скорости сходимости. Поэтому при работе с наблюдаемыми данными целесообразно указывать не только точечные оценки, но и интервалы неопределённости.

Перспективы дальнейшей работы связаны с распространением подхода на цепи с тремя и более состояниями, неоднородные переходные матрицы, скрытые марковские модели и более сложные стохастические системы. Отдельным направлением является разработка статистических методов, позволяющих учитывать неопределённость спектральных характеристик при оценке времени перемешивания.

Вклад автора, конфликт интересов, финансирование

Вклад автора: Автором самостоятельно выполнены постановка задачи, разработка методологии исследования, аналитические преобразования, численные расчёты, интерпретация полученных результатов и подготовка текста статьи. Конфликт интересов: Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов. Финансирование: Исследование выполнено без внешнего финансирования.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. [1]. Taylor H. M., Karlin S. An Introduction to Stochastic Modeling. 3rd ed. San Diego: Academic Press, 1998. — 631 p.
2. [2]. Norris J. R. Markov Chains. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. — 237 p.
3. [3]. Levin D. A., Peres Y. Markov Chains and Mixing Times. 2nd ed. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2017. — 447 p.
4. [4]. Муминов Ж. М. Предельное состояние для марковской цепи с двумя состояниями: магистерская диссертация по специальности 70540101 — «Математика (по направлениям)» / Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека. — Ташкент, 2026. — 69 с.

References

1. [1]. Taylor H. M., Karlin S. An Introduction to Stochastic Modeling. 3rd ed. San Diego: Academic Press, 1998. 631 p.
2. [2]. Norris J. R. Markov Chains. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 237 p.
3. [3]. Levin D. A., Peres Y. Markov Chains and Mixing Times. 2nd ed. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2017. 447 p.
4. [4]. Muminov J. M. Predel'noe sostoyanie dlya markovskoy tsepi s dvumya sostoyaniyami [Limiting State for a Two-State Markov Chain]: Master's Dissertation, Specialty 70540101, Mathematics. National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek. Tashkent, 2026. 69 p. (In Russian).